Corrigé du cinquième devoir à la maison

1. Clairement, T est linéaire car elle est construite à l'aide des formes linéaires $P \mapsto P(a_i)$, où $i \in [\![1, n]\!]$.

Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer son injectivité car $\dim E = n = \dim \mathbb{R}^n$.

Soit $P \in \operatorname{Ker} T$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = 0$. Autrement dit, P admet les a_i pour racines. Ou encore, P, qui est de degré au plus $n-1$, admet n racines distinctes, donc il est nul. Ainsi, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et T est injectif, donc bijectif.

T est bien un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. Comme T est un isomorphisme, T^{-1} est bien défini et est aussi un isomorphisme. Et l'on sait que l'image d'une base par un isomorphisme est une base. Par construction, $\mathscr{B}' = T^{-1}(\mathscr{E})$, donc

$\mathscr{B}'$ est une base de E.

Soit $P \in E$. Par définition de T et de $\mathscr{E}$,

$$T(P) = (P(a_1), \ldots, P(a_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, e_i.$$

Donc, en appliquant T^{-1}, lui aussi linéaire,

$$P = T^{-1}(T(P)) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, T^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, L_i.$$

Comme $\mathscr{B}'$ est une base de E, c'est donc *la* décomposition de P dans cette base.

$$\forall P \in E,\ P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\, L_i.$$

3.1. On a

$$\begin{cases} L_1(X) = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), \\ L_2(X) = X(2-X), \\ L_3(X) = \frac{1}{2}X(X-1), \\ \text{et } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

3.2.* On voit que

$$\operatorname{rg}(M - I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 < 3,$$

donc 1 est valeur propre de M.

Variante. 1 est seul sur la diagonale dans la première ligne de M, donc il est valeur propre évidente.

De plus, d'après le théorème du rang, $E_1(M)$ est une droite vectorielle.

Enfin, avec les colonnes de M, on constate que

$$C_1 + C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète en

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cela prouve que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(M).$$

Et comme $E_1(M)$ est une droite,

$$E_1(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Soit $P \in E$. Notons $U = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(P)$ et $V = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(P)$, les matrices colonnes de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. D'après le théorème du changement de base, on a

$$U = MV.$$

D'après la question 2, on a

$$V = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}.$$

Si l'on dit que $P = P(0) + P(1)\,X + P(2)\,X^2$, alors

$$U = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les polynômes P cherchés vérifient $U = V$. Autrement dit, on cherche U tel que $U = MU$.

Si l'on a fait la question 3.2, cela signifie que $U \in E_1(M)$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$U = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $P = \alpha\,(1 + X - X^2)$.

Si l'on n'a pas fait la question 3.2, il suffit alors de résoudre le système $U = MU$, d'inconnue U, sans parler ni de valeur propre, ni de vecteur propre. On retrouve bien-sûr le résultat.

L'ensemble cherché est donc $\mathbb{R}\,(1 + X - X^2)$.

4.1. $\boxed{M \text{ est inversible,}}$ c'est une matrice de passage !

Alors, M^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$. Ses colonnes sont donc les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ exprimés dans la base $\mathscr{B}'$. D'après la question 2, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$X^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k \, L_i.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.}$$

Commentaire. Où l'on reconnait...

4.2. $\boxed{\text{Oui,}}$ c'est l'égalité ci-dessus pour $k = 0$.

4.3. Par définition de M, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, sa colonne j contient les coordonnées de L_j dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit,

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \, X^{i-1}.$$

Alors, la relation précédente devient

$$1 = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} \, X^{i-1} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \right) X^{i-1}.$$

Il s'agit de la décomposition de 1 dans la base $\mathscr{B}$, qui est unique et s'écrit

$$1 = 1 + \sum_{i=2}^{n} 0 \cdot X^{i-1}.$$

D'où l'on tire immédiatement

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} m_{1j} = 1 \text{ et } \forall i \in [\![2, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0.}$$

Variante. L'on sait que $M M^{-1} = I_n$. En particulier, en notant $C_1(M^{-1})$ et $C_1(I_n)$ les premières colonnes de M^{-1} et I_n respectivement, $M \, C_1(M^{-1}) = C_1(I_n)$, ou encore

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M, et en interprétant comme à la question 3.2, on a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou encore,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} m_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et l'on retrouve le résultat.

4.4. Inversement, $M^{-1} \, M = I_n$. Pour éviter les confusions, notons les lignes des matrices avec la lettre ℓ. Alors, avec des notations évidentes, $\ell_1(M^{-1}) \, M = \ell_1(I_n)$, ce qui donne, puisque $a_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En découpant M en lignes,

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

ou encore,

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_{i1} & \sum_{i=1}^{n} m_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} m_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

D'où l'on tire

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_{i1} = 1 \text{ et } \forall j \in [\![2, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0.}$$

5. Manifestement, pour que cette question ait un sens, il faut supposer que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$, comme à la question 3, ce que l'énoncé a clairement oublié de dire...

Traitons les questions 5.1 et 5.2 simultanément. Comme $n \geqslant 4$, il y a donc des $a_4, \dots, a_n$ et $L_4, \dots, L_n$. D'après la question 2, tout polynôme P de E s'écrit

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \, L_i = P(0) \, L_1 + P(1) \, L_2 + P(2) \, L_3 + \sum_{i=4}^{n} P(a_i) \, L_i = u(P) + \sum_{i=4}^{n} P(a_i) \, L_i.$$

Mieux, en posant $F = \operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ et $G = \operatorname{Vect}(L_4, \dots, L_n)$, on a $E = F \oplus G$.

$\boxed{\text{Ainsi, } u \text{ s'interprète clairement comme le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G : \operatorname{Ker} u = G, \operatorname{Im} u = F \text{ et } \operatorname{Sp}(u) = \{0, 1\}.}$