

Sixième devoir à la maison

Sous-algèbres
[CS19]

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire tel que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à $\mathcal{A}$.)

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale.

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

A – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Q 1. Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Q 2. Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

Q 3. On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

B – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F , c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$.

Q 4. Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Q 5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.

On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.

Q 6. Déterminer $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

C – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Q 7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 8.* Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 9.* Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.