Corrigé du sixième devoir à la maison

Q 1. Considérons les formes linéaires naturelles
$$\varphi_{ij} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ M \mapsto m_{ij},$$
pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On voit que
$$T_n(\mathbb{K}) = \bigcap_{1\leqslant j<i\leqslant n} \operatorname{Ker}\varphi_{ij} \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) = \bigcap_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Ker}\varphi_{ij},$$
donc $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Soient alors $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $T_n(\mathbb{K})$. Posons $C = AB = (c_{ij})$. Pour $1 \leqslant j < i \leqslant n$,
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik}\,b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}.$$
Dans la première somme, $a_{ik} = 0$ car $k \leqslant j < i$. Dans la seconde somme, $b_{kj} = 0$ car $k \geqslant j+1 > j$. Alors, $c_{ij} = 0$ et $C \in T_n(\mathbb{K})$. Donc $T_n(\mathbb{K})$ est stable par le produit matriciel.

De même, si A et B sont dans $T_n^+(\mathbb{K})$, alors AB y est aussi.

Ainsi, $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont toutes deux des sous-algèbres de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 2. On sait que $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. Sinon, on se rappelle que $S_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $A_2(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$, en notant $s : M \mapsto M^\top$ et id l'application identité de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

Cependant, ces espaces ne sont pas stables par produit. En effet,
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in S_2(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\in S_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$$
$$\text{et } \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in A_2(\mathbb{K})}^{2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin A_2(\mathbb{K}).$$

Donc $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 3. Pas plus.

Les contrexemples précédents s'étendent en rangeant ces blocs 2×2 en haut à gauche de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, que l'on remplit ensuite de 0.

Q 4. Tout d'abord, $\mathcal{A}_F \neq \varnothing$ car l'endomorphisme nul stabilise F.

Ensuite, considérant deux endomorphismes u et v dans $\mathcal{A}_F$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in F$,
$$(u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) \in F.$$
En effet, $u(x)$ et $v(x)$ sont dans F puisque u et v stabilisent F ; et F est un sous-espace vectoriel de E. Alors, $(u + \lambda v)(F) \subset F$ et $u + \lambda v \in \mathcal{A}_F$.

Ainsi, $\mathcal{A}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E)$.

En outre, toujours avec $x \in F$,
$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) \in F.$$
Alors, $u \circ v(F) \subset F$ et $u \circ v \in \mathcal{A}_F$.

Ainsi, $\mathcal{A}_F$ est stable par produit de composition.

Finalement, $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(E)$.

Q 5. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à F. Tout endomorphisme de E est entièrement déterminé par sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. Tout endomorphisme de $\mathcal{A}_F$ aura dans cette base une matrice triangulaire par blocs, sous la forme
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$
avec $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Réciproquement, toute telle matrice correspond à un unique endomorphisme de $\mathcal{A}_F$. Alors, il suffit de compter le nombre de coefficients « libres » dans une telle matrice. Il y en a n^2, diminué du nombre de 0 en bas à gauche, c'est-à-dire $(n-p)p$. Alors,
$$\dim \mathcal{A}_F = n^2 - (n-p)p = n^2 - np + p^2.$$

Q 6. Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$,
$$p^2 - np + n^2 = (p - \tfrac{1}{2}n)^2 + \tfrac{3}{4}n^2.$$
Donc le maximum est atteint pour $|p - \frac{1}{2}n|$ maximum, c'est-à-dire $p = 1$ ou $p = n-1$, et alors
$$\max_{1\leqslant p\leqslant n-1}(n^2 - pn + p^2) = (1 - \tfrac{1}{2}n)^2 + \tfrac{3}{4}n^2 = n^2 - n + 1.$$

Q 7. Pour alléger les écritures, posons
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ \text{pour } (a,b) \in \mathbb{K}^2.$$
Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ dans $\Gamma(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On voit que
$$M(a,b) + \lambda M(c,d) = M(a + \lambda c, b + \lambda d) \in \Gamma(\mathbb{K}).$$
En outre, $I_2 = M(1,0) \in \Gamma(\mathbb{K})$ donc $\Gamma(\mathbb{K}) \neq \varnothing$.

Donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

De plus, on voit que
$$M(a,b)\,M(c,d) = M(ac - bd, ad + bc) \in \Gamma(\mathbb{K}).$$
Donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel.

Ainsi, $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 8.* La matrice $M(0,1)$ (soufflée par l'énoncé :-) n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, car l'on reconnait la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc il ne peut exister de matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}\,M(0,1)\,P$ soit diagonale.

Alors, $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 9.* En revanche, on diagonalise « facilement » dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$: $M(0,1) = PDP^{-1}$, avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$
Alors, pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on a
$$P^{-1}\,M(a,b)\,P = a\,I_2 + b\,D.$$

Cela prouve que $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable.