Septième devoir à la maison

[d'après EDHEC03]

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

— s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$;

— s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

— s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

— s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la n^{e} partie ».

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n, \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n,$$
$$G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n}, \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

1. a. Montrer que que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$P(E_{n+1}) = \tfrac{2}{3}\, P(E_n) + \tfrac{1}{2}\, P(F_n).$$

c. De la même façon (aucune explication n'est exigée), exprimer les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

2. a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$$

Vérifier que $U_{n+1} = M U_n$, où M est une matrice de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

b. Soit $Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que Q est inversible et déterminer Q^{-1}.

c. Calculer $Q^{-1} M Q$.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a. Montrer que pour tout entier n supérieur où égal à 2, $U_n = M^{n-2} U_2$.

b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

c. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \tfrac{3}{10}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \tfrac{2}{10},$$
$$\lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \tfrac{2}{10}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \tfrac{3}{10}.$$

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.