

Corrigé du huitième devoir à la maison

Q.C. Pour les questions de cours, voir le cours :-)

1.1. Pour prouver la somme demandée, cherchons une base des deux noyaux.

Tout d'abord,

$$(A + I_3)^2 = 9 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nommons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice. On voit que

$$C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète en les produit matriciels

$$(A + I_3)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2 \ C_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + I_3)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2 \ C_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans

$\ker(A + I_3)^2$. Ils sont clairement indépendants, donc $\dim(\ker(A + I_3)^2) \geq 2$. Mais $(A + I_3)^2$ n'est pas la matrice nulle, donc $\dim(\ker(A + I_3)^2) < 3$. Ainsi, $\dim(\ker(A + I_3)^2) = 2$ et

$$\ker(A + I_3)^2 = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \mathbb{C}\varepsilon_2.$$

Par ailleurs,

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Nommons encore C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette nouvelle matrice. Là aussi, on voit que

$$-C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui comme plus haut signifie que $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

est dans $\ker(A - 2I_3)$. En outre, cela entraîne que $A - 2I_3$ n'est pas inversible, donc $\text{rg}(A - 2I_3) < 3$. Mais à l'évidence, les deux premières colonnes C_1 et C_2 sont indépendantes, donc $\text{rg}(A - 2I_3) \geq 2$. Alors $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$ et $\dim(\ker(A - 2I_3)) = 1$, donc

$$\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\varepsilon_3) = \mathbb{C}\varepsilon_3.$$

Enfin, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de \mathbb{C}^3 , par exemple en calculant le déterminant. Alors

$$\boxed{\mathbb{C}^3 = \ker(A + I_3)^2 \oplus \ker(A - 2I_3)}.$$

Commentaires.

Bien-sûr, il est parfaitement permis de chercher de telles bases de façon traditionnelle, en résolvant les systèmes correspondants.

Et naturellement, rien n'empêche de chercher les valeurs propres et espaces propres de A ...

1.2. On a $A\varepsilon_3 = 2\varepsilon_3$ car $\varepsilon_3 \in \ker(A - 2I_3)$. De plus,

$$A\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\varepsilon_1 \text{ et } A\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Ainsi, dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, l'endomorphisme associé à A a pour matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et A est semblable à cette matrice.

En outre, une matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. Clairement, $\text{rg}(J(0)) = n - 1$ car

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.1. Nommons j_0 l'endomorphisme associé à $J(0)$. Par définition, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $j_0(e_i) = e_{i+1}$ et $j_0(e_n) = 0$.

Alors, $j_0^2(e_i) = j_0(e_{i+1}) = e_{i+2}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, et $j_0^2(e_{n-1}) = j_0^2(e_n) = 0$. Donc la matrice $J(0)^2$ comporte des 0 partout, sauf sur la parallèle à la diagonale qui va de la troisième ligne à la $(n-2)^{\text{e}}$ colonne :

$$J(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la ligne de 1 s'est décalée d'un cran vers le sud-ouest.

Par une récurrence immédiate, pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $j_0^k(e_i) = e_{i+k}$ et pour $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, $j_0^k(e_i) = 0$. Donc $J(0)^k$ est remplie de 0, sauf sur la parallèle à la diagonale qui va de la $(k+1)^{\text{e}}$ ligne à

la $(n - k)^e$ colonne :

$$J(0)^k = \begin{matrix} k+1 \rightarrow \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{array} \right) \\ \uparrow \\ n-k \end{matrix}$$

Enfin, si $k \geq n$, $J(0)^k = O_n$.

2.2.2. Pour tout $k \geq n$, $J(0)^k$ est nulle donc nilpotente. Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $(J(0)^k)^n = (J(0)^n)^k = O_n$, donc $J(0)^k$ est nilpotente.

Toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes, sauf bien-sûr $J(0)^0 = I_n$.

2.3. Soit un entier $m \geq n$. Pour tout $k \geq n$, $J(0)^k = O_n$ donc

$$S_m = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!}.$$

Autrement dit, les matrices S_m sont constantes à partir du rang n , donc

$$\alpha(J(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & & & \\ \frac{1}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } U = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & & & \\ \frac{1}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Il existe deux entiers r et s tels que $A^r = B^s = O_n$. Comme A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :

$$(\lambda A + B)^{r+s} = \sum_{k=0}^{r+s} \binom{r+s}{k} \lambda^k A^k B^{r+s-k}.$$

Si $k \leq r$, $r+s-k \geq s$ donc $B^{r+s-k} = O_n$, et si $k \geq r$, $A^k = O_n$. Ainsi, $(\lambda A + B)^{r+s} = O_n$ et $\lambda A + B$ est nilpotente.

Toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente.

2.5. D'abord, les $n - 1$ premières colonnes de U sont clairement indépendantes et la dernière est nulle, donc

$$\text{rg}(U) = n - 1.$$

En outre, U est combinaison linéaire des puissances de $J(0)$, qui commutent et qui sont nilpotentes d'après 2.2.2. Donc d'après 2.4, U est nilpotente.

3.1. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in \ker(u^i)$. Alors $u^i(x) = 0$ donc $u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = 0$ et $x \in \ker(u^{i+j})$.

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j}).$$

3.2. Posons $T = \{m \in \mathbb{N} \mid t_m = t_{m+1}\}$.

D'après la question précédente, pour $m \in \mathbb{N}$, $\ker(u^m) \subset \ker(u^{m+1}) \subset E$ donc $t_m \leq t_{m+1} \leq n$. La suite (t_m) est donc croissante et majorée, elle converge. Mais comme c'est une suite d'entiers, elle est constante à partir d'un certain rang. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq p$, $t_m = t_p$: en particulier, $t_{p+1} = t_p$. Ainsi, $p \in T$ et $T \neq \emptyset$.

L'ensemble T est donc une partie de \mathbb{N} non vide, donc il admet un plus petit élément :

$$\text{l'entier } r = \min \{m \in \mathbb{N} \mid t_m = t_{m+1}\} \text{ existe.}$$

3.3.i Soit $m < r$. Alors $m \notin T$ donc $t_m \neq t_{m+1}$. Comme $t_m \leq t_{m+1}$, $t_m < t_{m+1}$ et

$$\ker(u^m) \subsetneq \ker(u^{m+1}).$$

3.3.ii. On a vu que $r = \min(T)$ donc $r \in T$: en particulier, $t_r = t_{r+1}$ et comme $\ker(u^r) \subset \ker(u^{r+1})$,

$$\ker(u^r) = \ker(u^{r+1}).$$

3.3.iii. Soient $m \geq r$ et $x \in \ker(u^{m+1})$. On a $0 = u^{m+1}(x) = u^{r+1}(u^{m-r}(x))$ donc $u^{m-r}(x) \in \ker(u^{r+1}) = \ker(u^r)$, d'où $0 = u^r(u^{m-r}(x)) = u^m(x)$ et $x \in \ker(u^m)$. Ainsi, $\ker(u^{m+1}) \subset \ker(u^m)$. Mais comme l'autre inclusion est toujours vraie,

$$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1}).$$

4. Dans cette partie 4, nous utiliserons les notations et les résultats de la partie 3.

4.1.1. On a $w : \text{Im}(v^p) \rightarrow E$, $x \mapsto v^q(x)$.

Soit $z \in \text{Im}(w)$: il existe $y \in \text{Im}(v^p)$ tel que $z = w(y) = v^q(y)$. De plus, il existe $x \in E$ tel que $y = v^p(x)$, donc $z = v^q(v^p(x)) = v^{p+q}(x)$ et $z \in \text{Im}(v^{p+q})$. Ainsi, $\text{Im}(w) \subset \text{Im}(v^{p+q})$.

Réciproquement, soit $z \in \text{Im}(v^{p+q})$. Il existe $x \in E$ tel que $z = v^{p+q}(x) = v^q(v^p(x)) = w(v^p(x))$ car $v^p(x) \in \text{Im}(v^p)$, donc $z \in \text{Im}(w)$. Ainsi, $\text{Im}(v^{p+q}) \subset \text{Im}(w)$.

$$\text{Finalement, } \text{Im}(w) = \text{Im}(v^{p+q}).$$

4.1.2. Soit $x \in \text{Ker } w$. Alors $0 = w(x) = v^q(x)$ et $x \in \ker(v^q)$. Ainsi, $\text{Ker}(w) \subset \ker(v^q)$.

4.1.3. On a

$$\begin{aligned} \lfloor \dim(\ker(v^{p+q})) \rfloor &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(v^{p+q})) \\ &= \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(w)) \\ &= \dim(E) - (\dim(\operatorname{Im}(v^p)) - \dim(\ker(w))) \\ &= \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(w)) \\ &\leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q)), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement le théorème du rang pour v^{p+q} , la question 4.1.1, le théorème du rang pour w , le théorème du rang pour v^p et la question 4.1.2. Autrement dit, $t_{p+q} \leq t_p + t_q$.

4.1.4. Il s'ensuit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $t_{i+1} \leq t_i + t_1$. Or v est de rang $n - 1$ donc $t_1 = \dim(\ker(v)) = 1$ et $t_{i+1} \leq t_i + 1$. Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\lfloor \forall i \in \mathbb{N}, \dim(\ker(v^i)) \leq i. \rfloor$$

4.1.5. Ainsi, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_i \leq i$. De plus $t_1 = 1$ et $t_n = n$ car $v^n = \theta$. D'après la partie 3, la suite (t_i) croît strictement jusqu'au rang r , puis est stationnaire à partir du rang r ; et elle est majorée par n . Ici, elle stationne donc sur la valeur n car $t_n = n$, et à partir du rang n car $t_{n-1} \leq n - 1 < n = t_n$.

Ainsi, il faut ranger les n entiers distincts $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entre 1 et n , ce qui n'est possible que si $t_i = i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc

$$\lfloor \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \dim(\ker(v^i)) = i. \rfloor$$

4.2. Comme $\dim(\ker(v^{n-1})) = n - 1$, $\lfloor v^{n-1} \neq \theta. \rfloor$

4.3. Il existe $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $B_1 = (e, v(e), v^2(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est libre : elle sera une base de E car elle contient n vecteurs.

Soit $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v^{i-1}(e) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i v^{n+i-2}(e) = \lambda_1 v^{n-1}(e) = 0$ en appliquant v^{n-1} , car pour tout $i \geq 2$, $n + i - 2 \geq n$ et $v^{n+i-2}(e) = 0$. Mais $v^{n-1}(e) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et $\sum_{i=2}^n \lambda_i v^{i-1}(e) = 0$. En appliquant v^{n-2} , $\lambda_2 v^{n-1}(e) = 0$ et $\lambda_2 = 0$. Par une récurrence immédiate, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ et B_1 est libre.

4.4. En nommant $e_i = v^{i-1}(e)$ où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on voit que $v(e_i) = e_{i+1}$ si $i \leq n - 1$ et $v(e_n) = 0$. Alors, la matrice de v dans la base B_1 est

$$\lfloor \operatorname{mat}_{B_1}(v) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} = J(0). \rfloor$$

4.5. On vient de voir que si v est nilpotent de rang $n - 1$, sa matrice est semblable à $J(0)$, donc

tout endomorphisme nilpotent de rang $n - 1$ a une matrice semblable à $J(0)$ et donc les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

5.1. Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$, et $m \in \mathbb{N}$. D'une part, par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}MP)^k = P^{-1}M^kP$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \frac{(P^{-1}MP)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^m P^{-1} \frac{M^k}{k!} P \\ &= P^{-1} \left(\sum_{k=0}^m \frac{M^k}{k!} \right) P. \end{aligned}$$

D'autre part, par définition,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(P^{-1}MP)^k}{k!} &= \alpha(P^{-1}MP) \\ \text{et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{M^k}{k!} &= \alpha(M), \end{aligned}$$

et l'énoncé nous permet d'admettre que ces limites existent et se calculent coefficient par coefficient. Alors, par opérations sur les limites, comme les coefficients de P et P^{-1} sont fixes,

$$\lfloor \alpha(P^{-1}MP) = P^{-1}\alpha(M)P. \rfloor$$

5.2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \lfloor e^z = i \iff e^z = e^{i\pi/2} \\ \iff z = i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}. \rfloor \\ \lfloor e^z = -1 \iff e^z = e^{i\pi} \\ \iff z = i\pi + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}. \rfloor \end{aligned}$$

Cherchons la forme trigonométrique de $-3 - 4i$. D'une part, $-3 - 4i = 5(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i)$. D'autre part, $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ donc l'argument principal dans $]-\pi, \pi[$ de ce nombre est donné par

$$\theta = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{-\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{5}} \right) = -2 \operatorname{Arctan}(2).$$

Alors $-3 - 4i = 5e^{-2i \operatorname{Arctan}(2)}$. Donc si $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} \lfloor e^z = -3 - 4i \iff e^x e^{iy} = 5e^{-2i \operatorname{Arctan}(2)} \\ \iff e^x = 5, e^{iy} = e^{-2i \operatorname{Arctan}(2)} \\ \iff x = \ln(5), y = -2 \operatorname{Arctan}(2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \iff z = \ln(5) - 2i \operatorname{Arctan}(2) + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}. \rfloor \end{aligned}$$

5.3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $e^{-z} = e^x e^{iy}$ et que $e^x > 0$, $e^z \neq 0$. Donc

il n'existe aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = 0$.

Supposons $\mu \neq 0$. Il s'écrit de façon unique $\mu = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned} e^z = \mu \iff e^x e^{iy} = r e^{i\theta} \\ \iff e^x = r, y = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \iff z = \ln(r) + i\theta + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En notant $\operatorname{Arg}(\mu) = \theta \in]-\pi, \pi]$ l'argument principal de μ , on a

pour tout $\mu \in \mathbb{C}^*$, les $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = \mu$ sont les $z = \ln|\mu| + i \operatorname{Arg}(\mu) + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.4.1. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$S_m = \sum_{k=0}^m \frac{(sI_n)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^m \frac{s^k}{k!} \right) I_n$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^s I_n = \mu I_n.$$

Ainsi, $\alpha(sI_n) = \mu I_n$.

5.4.2. Comme sI_n et $J(0)$ commutent,

$$\alpha(J(s)) = \alpha(sI_n + J(0)) = \alpha(sI_n)\alpha(J(0))$$

$$= \mu I_n \alpha(J(0)) = \mu \alpha(J(0)).$$

5.4.3. D'après la question 2.5, comme $\mu \neq 0$,

la matrice $\mu(\alpha(J(0)) - I_n) = \mu U$ est nilpotente de rang $n - 1$.

5.4.4. D'après la question 4.5, il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}(\mu U)Q = J(0)$, donc

$$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = Q^{-1}\mu\alpha(J(0))Q$$

$$= Q^{-1}\mu(I_n + U)Q$$

$$= Q^{-1}\mu I_n Q + Q^{-1}\mu U Q$$

$$= \mu I_n + J(0) = J(\mu).$$

Ainsi, il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu).$$

5.5. On a $Q^{-1}\alpha(J(s))Q = \alpha(Q^{-1}J(s)Q)$ d'après la question 5.1, donc

la matrice $Q^{-1}J(s)Q$ est une solution de l'équation $\alpha(X) = J(\mu)$.

5.6. Clairement, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha({}^tM) = {}^t\alpha(M)$. Alors l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$ équivaut à l'équation $\alpha({}^tX) = J(\mu)$, donc

une solution de l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$ est la matrice $X = {}^tQ {}^tJ(s) {}^tQ^{-1}$.

5.7.1. On a $T = {}^tJ(i)$ donc on pose $\mu = i$ et on choisit $s = i\frac{\pi}{2}$ d'après 5.2. En outre, d'après 2.3,

$$J(0) = U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mu U = QJ(0)Q^{-1}$ en posant

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Enfin, d'après 5.6, une solution X_1 de l'équation $\alpha(X_1) = T$ est

$$X_1 = {}^tQ {}^tJ(s) {}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} i\frac{\pi}{2} & -i \\ 0 & i\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

5.7.2.1. Ici, $\mu = -1$ et $s = i\pi$. De façon analogue,

$$B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}.$$

5.7.2.2. Un calcul par bloc sans difficulté donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k = \begin{pmatrix} B_1^k & 0 \\ 0 & \ln^k(2) \end{pmatrix}$$

donc pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^m \frac{H^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{B_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^m \frac{\ln^k(2)}{k!} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \alpha(H) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.7.2.3. D'après 1.3, $\alpha(H) = P^{-1}AP$ donc d'après 5.1, $A = P\alpha(H)P^{-1} = \alpha(PHP^{-1})$, donc

$$X_2 = PHP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \ln(2) & i\pi - \ln(2) & -i\pi + \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -1 + \ln(2) & i\pi + 1 - \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -i\pi - 1 + \ln(2) & 2i\pi + 1 - \ln(2) \end{pmatrix}.$$