Neuvième devoir à la maison

PROBLÈME 1
[CCP13]

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un ***vecteur propre commun****.*

La partie I traite un cas particulier en dimension 3. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- 0_n la matrice nulle d'ordre n
- I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

- $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \mid MX = 0\}$,
- $\mathrm{Im}(M) = \{MX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$,
- $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M,
- $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$
- $\mathrm{Im}_\lambda(M) = \mathrm{Im}(M - \lambda I_n)$.

Définitions

• Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :

i) $\mathbf{e} \neq 0$;

ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$;

iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$.

On définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule :

$$[A, B] = AB - BA.$$

• Soient f et g, deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$; on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :

i) $\mathbf{e} \neq 0$;

ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;

iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$.

On définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule :

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Partie I : étude dans un cas particulier

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note aussi

$$\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

I.1.

I.1.a. Déterminer le spectre de A.

I.1.b. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

I.1.c. A est-elle diagonalisable ?

I.1.d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.

I.2.

I.2.a. Déterminer le spectre de B.

I.2.b. Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

I.2.c. B est-elle diagonalisable ?

I.3.

I.3.a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

I.4.

I.4.a. Vérifier que $[A, B] = C$.

I.4.b. Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II : condition nécessaire et conditions suffisantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.

II.1.a. Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A,B])$.

II.1.b. Vérifier que $\mathrm{rg}([A,B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété $\mathcal{H}$** s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A,B]).$$

II.2. Montrer que si $[A,B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ **la propriété suivante** : pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi,\psi]) \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.

II.4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

II.5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$.**

On note $C = [A,B]$, on suppose que $\mathrm{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

II.5.a. Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

II.5.b. Vérifier que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.

II.5.c. Montrer que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d. Établir les inégalités suivantes :

$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n-1.$$

Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

II.5.e. Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.

En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.

II.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

PROBLÈME 2

[CCP17]

Marche aléatoire sur le net

Internet peut être modélisé par un graphe dont les sommets sont les pages internet (ou sites) et les arêtes les liens entre les pages. L'idée de l'algorithme du « PageRank » est de surfer au hasard sur Internet et de compter combien de fois on passe sur chaque page. Une page p peut être considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p.

Dans ce problème, nous étudions deux exemples avec quatre pages puis trois pages. La partie I traduit le premier exemple sous une forme matricielle. Dans les parties II et III, on s'intéresse à l'étude du second exemple. La partie IV classe les trois pages du second exemple par ordre de popularité.

Partie I - Un premier exemple

Dans le schéma suivant, on considère un internet simplifié constitué de quatre pages internet. Par exemple, la page 1 possède un lien vers la page 2, un vers la page 3 et un vers la page 4, etc. La page 3 ne possède qu'un seul lien vers la page 1.

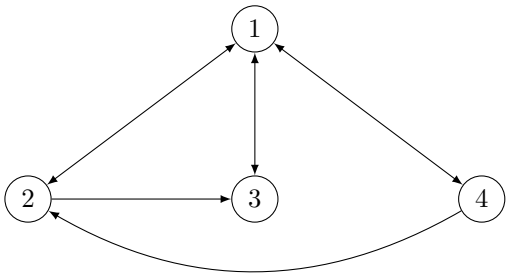

Figure 1 – Exemple n° 1

- i et j sont des indices de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ et n est un entier naturel de $\mathbb{N}$.
- $p_n(j)$ est la probabilité que l'internaute soit sur la page j à l'instant $\tau = n$.
- On note $t_{i,j}$ la probabilité de se trouver à la page i à l'instant $\tau = n+1$ sachant qu'on était sur la page j à l'instant $\tau = n$. On fait l'hypothèse qu'il y a équiprobabilité entre les liens d'une page. Comme la page 1 pointe sur trois autres pages, la probabilité $t_{3,1}$ d'aller de la page 1 vers la page 3 est $\frac{1}{3}$.
- On fait également l'hypothèse qu'une page a une probabilité nulle de pointer sur elle-même, donc pour tout i de $\{1,2,3,4\}$, $t_{i,i} = 0$.
- On note $A_n(j)$ l'événement « être sur la page j à l'instant $\tau = n$ » et on supposera que ces événements sont de probabilité non nulle.
- On note T_4 la matrice $(t_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}}$. Cette matrice s'appelle matrice de transition dont le schéma présenté sur la **figure 1** s'appelle graphe.

Q1. Compléter la matrice T_4 correspondante à l'exemple n° 1 en remplaçant les $t_{i,j}$ par leurs valeurs :

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ \frac{1}{3} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ \frac{1}{3} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix}$$

Q2. Pour j de $\{1,2,3,4\}$, calculer les sommes $\sum_{i=1}^{4} t_{i,j}$. Justifier soigneusement le résultat.

Q1. En précisant le théorème utilisé, montrer que :

$$p_{n+1}(1) = t_{1,1}p_n(1)+t_{1,2}p_n(2)+t_{1,3}p_n(3)+t_{1,4}p_n(4).$$

Q2. Donner sans justification l'expression de $p_{n+1}(2)$, $p_{n+1}(3)$ et $p_{n+1}(4)$ en fonction des $p_n(j)$.

Q5. On note U_n le vecteur colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_4 U_n$.

Q6. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T_4^n U_0$.

Partie II - Étude d'un polynôme et de trois suites

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

On définit dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $S(X) = 4X^3 - 3X - 1$.

Q7. Vérifier que $\lambda = 1$ est une racine simple et $\mu = -\frac{1}{2}$ est une racine double de S.

Q8. Soit n un entier naturel. Justifier l'existence d'un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ et d'un polynôme $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1) \qquad X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$

On ne cherchera pas à déterminer le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Q9. En remplaçant X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), en déduire deux équations vérifiées par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Q10. En dérivant l'égalité (1) puis en remplaçant X par μ, en déduire une troisième équation vérifiée par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Q11. Après résolution des équations précédemment obtenues, on admet que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{9}\left(4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right), \\ \beta_n = \frac{1}{9}\left(4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right), \\ \gamma_n = \frac{1}{9}\left(1 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right). \end{cases}$$

Montrer que les trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qu'on déterminera.

Partie III - Un deuxième exemple

On considère dans cette partie la matrice :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Q12. En s'inspirant de l'exemple n° 1 de la partie I, dessiner le graphe dont la matrice de transition est la matrice T_3.

Q13. Montrer que le polynôme caractéristique de T_3 est égal à $\frac{1}{4}S$.

Q14. Déterminer les valeurs propres de T_3.

Q15. Pour chaque valeur propre, déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé.

Q16. En précisant le théorème utilisé, montrer que la matrice T_3 n'est pas diagonalisable.

Q17. Si $M(X) = m_0 + m_1 X + \cdots + m_r X^r$ désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $M(T_3)$ la matrice telle que $M(T_3) = m_0 I_3 + m_1 T_3 + \cdots + m_r T^r$ avec

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer T_3^2 et T_3^3 puis montrer que $S(T_3) = O_3$ où O_3 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.

Q18. Comme dans la partie I, on pose pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on note :

$$U_0 = \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in R.$$

Que vaut la somme $a + b + c$?

Q19. On admet, comme dans la partie I, que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T_3^n U_0$.

On admet également qu'en remplaçant dans l'égalité (1) de la question Q28, la variable X par la matrice T_3, on obtient, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité matricielle :

$$T_3^n = S(T_3)\,Q(T_3) + \alpha_n\,T_3^2 + \beta_n\,T_3 + \gamma_n\,I_3.$$

En déduire que :

$$T_3^n = \alpha_n\,T_3^2 + \beta_n\,T_3 + \gamma_n\,I_3.$$

Q20. Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression du vecteur U_n en fonction du triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ et du triplet (a, b, c).

Q21. Montrer que les trois suites $(p_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n(3))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qui seront déterminées.

On note, pour $i \in \{1,2,3\}$, $p_\infty(i) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(i)$.

Quelle interprétation peut-on donner aux limites $p_\infty(1)$, $p_\infty(2)$ et $p_\infty(3)$?

Partie IV - Popularité d'une page

Un moteur de recherche consiste à classer les pages par pertinence. Un des algorithmes possible repose sur l'hypothèse qu'une page p est considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p.

Q22. Parmi les 3 sites de l'exemple donné dans la partie II, quel(s) site(s) vous semble(nt) le(s) plus populaire(s) ? Vous devez justifier votre opinion.

Dans la suite de cette partie, on reprend le deuxième exemple donné dans la partie III.

On mesure la popularité du site n° i par le réel $r(i)$ de l'intervalle $[0,1]$. Le site i est plus populaire que le site i' si $r(i) \geqslant r(i')$.

Un site qui émet par exemple deux liens ne transmet que pour moitié sa popularité aux sites vers lesquels il pointe.

On admet que le triplet $(r(1), r(2), r(3))$ vérifie le système :

$$(2) \qquad \begin{cases} r(1) = \dfrac{1}{2}\,r(2) + \dfrac{1}{2}\,r(3) \\ r(2) = \dfrac{1}{2}\,r(3) \\ r(3) = r(1) + \dfrac{1}{2}\,r(2) \end{cases}$$

Q23. On pose $R = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \end{pmatrix}$.

Réécrire le système (2) à l'aide de la matrice T_3 et du vecteur colonne R.

Lorsque R n'est pas le vecteur nul, comment s'appelle R vis-à-vis de la matrice T_3 ?

Q24. On pose $\|R\|_1 = |r(1)| + |r(2)| + |r(3)|$.

Déterminer un vecteur R avec $r(1) > 0$ puis calculer $\|R\|_1$.

Q25. Déterminer les coordonnées du vecteur $R' = \dfrac{1}{\|R\|_1}\,R$.

Justifier sans calcul que R' est encore solution du système (2).

Q26. Déduire de R' l'ordre des sites du plus populaire au moins populaire.

FIN