Corrigé du neuvième devoir à la maison

PROBLÈME 1

I.1.a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ \text{factorisation de } C_1 \end{array}$$

$$= (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= (x+2)(x-1)^2 \text{ déterminant triangulaire.}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-2_1, 1_2\}$, en indexant les valeurs propres par leur multiplicité.

I.1.b. En rangeant en colonnes les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$, et en utilisant la règle de Sarrus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

donc $\mathcal{F}$ est bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On calcule facilement

$$A\,\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1,\ A\,\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_2,$$

$$A\,\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\,\mathbf{u}_3.$$

$\mathcal{F}$ est bien une famille de vecteurs propres de A.

I.1.c. Puisque $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une base de vecteurs propres de A, A est diagonalisable.

Commentaire. Mieux, A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

I.1.d. On a

$$B\,\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1),$$

$$B\,\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_2),$$

$$B\,\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_3),$$

donc aucun vecteur de $\mathcal{F}$ n'est propre pour B.

I.2.a. Sans difficulté, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_B(x) = -\det(B - xI_3) = -\begin{vmatrix} 3-x & -3 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & -3 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -(2-x)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^3.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(B) = \{2_3\}$.

I.2.b. $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Im}(B - 2\,I_3)$ est engendré par les colonnes de

$$B - 2\,I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Où l'on voit clairement que les trois colonnes sont colinéaires à $\mathbf{u}_4$ donc $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$.

D'après le théorème du rang,

$$\dim(E_2(B)) = 3 - \mathrm{rg}(B - 2\,I_3) = 3 - 1 = 2.$$

I.2.c. Comme 2 est valeur propre triple de B et que $\dim(E_2(B)) < 3$, B n'est pas diagonalisable.

I.3.a. D'une part,

$$A\,\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_5 \text{ et } B\,\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{u}_5$$

donc $\mathbf{u}_5 \in E_1(A) \cap E_2(B)$ et $\dim(E_1(A) \cap E_2(B)) \geqslant 1$.

D'autre part, d'après I.2.b, $\dim(E_2(B)) = 2$, donc $\dim(E_1(A) \cap E_2(B)) \leqslant 2$.

D'après I.1.b et I.1.c, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Si l'on avait $\dim(E_1(A) \cap E_2(B)) = 2$, on aurait $E_1(A) \cap E_2(B) = E_1(A) = E_2(B)$. En particulier, on aurait $\mathbf{u}_1 \in E_2(B)$ et l'on a vu en I.1.d que ce n'était pas vrai. Donc $\dim(E_1(A) \cap E_2(B)) = 1$ et

$E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Soit un vecteur propre $\mathbf{u}$ commun à A et B. Comme $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$, $\mathbf{u} \in E_2(B)$.

Si $\mathbf{u} \in E_1(A)$, $\mathbf{u} \in E_1(A) \cap E_2(B)$ donc d'après ce qui précède $\mathbf{u}$ est colinéaire à $\mathbf{u}_5$.

Si $\mathbf{u} \in E_{-2}(A)$, d'après la question I.1.b, $\mathbf{u}$ est colinéaire à $\mathbf{u}_3$, lequel n'est pas propre pour B. Donc ce cas est exclu.

Finalement, l'ensemble des vecteurs propres communs à A et B est $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.4.a. Oui.

I.4.b. Il est bien-sûr possible de déterminer les valeurs propres de C de façon usuelle. Voici une approche différente.

On voit que les lignes L_1 et L_3 de C sont égales, donc $\mathrm{rg}(C) \leqslant 2 < 3$ et $0 \in \mathrm{Sp}(C)$. De plus, en nommant les colonnes de façon évidente, on voit que

$$C_1 + C_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

ce que l'on traduit en

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $-6 \in \mathrm{Sp}(C)$, et en passant $\mathbf{u}_4 \in E_{-6}(C)$. Alors, on connait deux des trois valeurs propres possibles de C, donc son polynôme caractéristique χ_C est scindé sur $\mathbb{R}$, donc la trace de C est la somme de ses valeurs propres : $\mathrm{Tr}(C) = 0$, donc la dernière valeur propre est 6. Finalement, $\mathrm{Sp}(C) = \{0, 6, -6\}$. Comme C admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, donc C est semblable à $D = \mathrm{diag}(0, 6, -6)$.

Bien-sûr, $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(D) = 2$.

II.1.a. Comme $\mathbf{e}$ est vecteur propre pour A et B, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ et $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$. Alors

$$\begin{aligned}[A, B]\mathbf{e} &= AB\mathbf{e} - BA\mathbf{e} = A(\mu\mathbf{e}) - B(\lambda\mathbf{e}) \\ &= \mu A\mathbf{e} - \lambda B\mathbf{e} = \mu\lambda\mathbf{e} - \lambda\mu\mathbf{e} = 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A, B])$.

II.1.b. Comme $\mathbf{e} \neq 0$, $\mathrm{Ker}([A, B]) \neq \{0\}$ donc $\dim(\mathrm{Ker}([A, B])) \geqslant 1$ et d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}([A, B]) &= n - \dim(\mathrm{Ker}([A, B])) \\ &\leqslant n - 1 < n.\end{aligned}$$

II.2. Si $[A, B] = 0_n$, $\mathrm{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B])$. En passant, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$.

Si $[A, B] = 0_n$, A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.a. Tout d'abord, ψ est clairement linéaire. Si $X \in E_\lambda(A)$, $X \in \mathrm{Ker}([A, B])$ d'après la propriété $\mathcal{H}$. Autrement dit, $(AB - BA)X = 0$ ou encore $ABX = BAX$. Alors

$$A\psi(X) = ABX = BAX = \lambda BX = \lambda\psi(X),$$

et $\psi(X) \in E_\lambda(A)$. Ainsi, $E_\lambda(A)$ est stable par ψ :

ψ définit bien un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b. Comme plus haut, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(\psi) \neq \varnothing$ donc ψ admet une valeur propre μ. Cela signifie qu'il existe $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ tel que $\psi(X) = \mu X$, ou encore $BX = \mu X$. Et comme $AX = \lambda X$,

A et B admettent un vecteur propre commun.

II.4. Dans un espace E de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle, les endomorphismes sont tous des homothéties, donc tout vecteur non nul est forcément propre pour tous les endomorphismes, et

la propriété $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie.

II.5.a. Comme A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, $E_\lambda(A) \not\subset \mathrm{Ker}(C)$ donc il existe $\mathbf{u} \in E_\lambda(A)$ tel que $\mathbf{u} \notin \mathrm{Ker}(C)$.

Autrement dit, il existe $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

II.5.b. Bien-sûr, $\mathbf{v} = C\mathbf{u} \in \mathrm{Im}(C)$. De plus, $\dim(\mathrm{Im}(C)) = \mathrm{rg}(C) = 1$. Ainsi, $\mathrm{Im}(C)$ est une droite contenant le vecteur non nul $\mathbf{v}$. Alors

$\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$.

II.5.c. Il suffit de montrer que $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = C\mathbf{u} &= (AB - BA)\mathbf{u} \\ &= AB\mathbf{u} - \lambda B\mathbf{u} = (A - \lambda I_n)(B\mathbf{u}) \in \mathrm{Im}_\lambda(A),\end{aligned}$$

ce que l'on voulait.

II.5.d. Comme $\mathrm{rg}(C) = 1$ et $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$,

$\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \geqslant 1$.

De plus, comme $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1$, d'après le théorème du rang,

$\dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.

II.5.e. Comme $A - \lambda I_n$ est un polynôme en A, A et $A - \lambda I_n$ commutent donc $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$.

En outre,

$$\begin{aligned}[B, A - \lambda I_n] &= B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B \\ &= BA - \lambda B - AB + \lambda B = -C.\end{aligned}$$

Puisque A et $A - \lambda I_n$ commutent, l'image $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ de $A - \lambda I_n$ est stable par A, donc

φ définit un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

Soit $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$: il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X = (A - \lambda I_n)Y$. Alors

$$\begin{aligned}\psi(X) = BX &= B(A - \lambda I_n)Y \\ &= (-C + (A - \lambda I_n)B)Y \\ &= -CY + (A - \lambda I_n)BY.\end{aligned}$$

Clairement, $(A - \lambda I_n)BY \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. De plus, $-CY \in \mathrm{Im}(C)$ et d'après II.5.c, $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$ donc $-CY \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Alors $\psi(X) \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$ et

ψ définit un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. En notant $k = \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A))$, d'après II.5.d, $k \in [\![1, n-1]\!]$ et par hypothèse, $\mathcal{P}_k$ est vraie. De plus, la matrice de $[\varphi, \psi]$ est $[A, B] = C$ donc $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) = \mathrm{rg}(C) = 1$. D'après $\mathcal{P}_k$,

φ et ψ admettent un vecteur propre commun.

Ainsi, il existe $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A) \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(\psi)$ tels que $\varphi(X) = \alpha X$ et $\psi(X) = \beta X$, ou encore $AX = \alpha X$ et $BX = \beta X$.

A et B admettent un vecteur propre commun.

II.6. Démontrons $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n.

Initialisation. On a prouvé que $\mathcal{P}_1$ est vraie en II.4.

Transmission. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et un couple (φ, ψ) d'endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$. Considérons une base de E et les matrices A et B de φ et ψ dans cette base. En posant $C = [A, B]$, on a donc $\mathrm{rg}(C) \leqslant 1$.

Si $\mathrm{rg}(C) = 0$, $C = 0$. D'après II.2, A et B vérifient $\mathcal{H}$. Et d'après II.3, A et B ont un vecteur propre commun, donc aussi φ et ψ.

Supposons que $\mathrm{rg}(C) = 1$. Si A et B vérifient $\mathcal{H}$, toujours d'après II.3, A et B, donc φ et ψ, ont un vecteur propre commun. Si A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, on est dans le cadre de la question II.5 qui prouve que A et B, donc φ et ψ, ont un vecteur propre commun.

Dans tous les cas, φ et ψ ont un vecteur propre commun. Cela signifie que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence forte,

$\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.