# Premier devoir de révision

## PROBLÈME

[CCP16]

Les calculatrices sont interdites

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, t^k (1-t)^{n-k}.$$

On propose d'étudier quelques aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques de cette famille de polynômes appelés « polynômes de Bernstein ».

Dans la partie 1, on considère des exemples de courbes dont le paramétrage fait intervenir des polynômes de Bernstein dans des cas simples. Dans la partie 2, on s'intéresse à deux endomorphismes $\varphi_n$ et $B_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les propriétés sont liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La loi binomiale permet de faire le lien avec l'endomorphisme $B_n$ dont on étudie en détail la restriction à $\mathbb{R}_2[X]$. On étudie, dans la partie 3, les aspects analytiques de $B_n(f)$ pour une fonction $f$ définie sur $[0, 1]$ avec $B_n$ défini sur le modèle de la partie 2. Par l'usage des probabilité, on obtient une démonstration « naturelle » de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers $f$ sur $[0, 1]$ sous l'hypothèse forte que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. La partie 4 complète la partie 3 par l'étude d'intégrales impropres et d'intégrales à paramètres. La partie 5 aborde la question des séries de fonctions liées aux polynômes de Bernstein.

Les parties 1 et 5 sont indépendantes des autres parties. La partie 3 dépend seulement de la partie 2 et cela uniquement pour la question 5 faisant intervenir les probabilités. La partie 4 dépend seulement de la partie 3 et uniquement par la question 11.d).

### Partie 1. Géometrie

On note $A_0$, $A_1$ et $A_2$ les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (1, 1)$ et $A_2 = (1, 0)$.

On note $\mathscr{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{T} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \geqslant 1\}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1-t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$$A(t) = p_{0,1}(t)\, A_0 + p_{1,1}(t)\, A_1,$$
$$B(t) = p_{0,1}(t)\, A_1 + p_{1,1}(t)\, A_2$$
$$\text{et } C(t) = p_{0,1}(t)\, A(t) + p_{1,1}(t)\, B(t).$$

**1.** Soit $t \in [0, 1]$.

**1.a)** Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de $t$.

**1.b)** Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

**1.c)** Montrer que $C(t) = \sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)\, A_k$.

**2.)** Montrer que $\mathscr{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

**3.)** Soit $\mathscr{C}$ l'arc paramétré à partir de la fonction

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto C(t).$$

**3.a)** Justifier que tous les points de $\mathscr{C}$ sont dans $\mathscr{T}$.

**3.b)** Pour tout $t \in [0, 1]$, déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathscr{D}_t$ à $\mathscr{C}$ en $C(t)$.

**3.c)** Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, le segment $[A(t), B(t)]$ est inclus dans $\mathscr{D}_t$.

**3.d)** Représenter dans un même repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$, la partie $\mathscr{T}$ et les segments $[A(t), B(t)]$ pour $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 1$.

### Partie 2. Algèbre linéaire et probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$. Pour $P(X)$ un polynôme réel, on note $P'(X)$ le polynôme dérivé.

On note $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \ldots, p_{n,n}(X))$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $B_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P)(X) = n\,X\,P(X) + X\,(1-X)\,P'(X)$$
$$\text{et } B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

**4.**

**4.a)** Montrer que $\varphi_n$ et $B_n$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

**4.b)** Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi_n(p_{k,n})(X) = k\, p_{k,n}(X).$$

**4.c)** En déduire que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\varphi_n$ est diagonalisable.

**4.d)** Montrer que $\varphi_n$ n'est pas bijectif et que $B_n$ est bijectif.

**5.** Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $T_r$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r,t)$. On note $\overline{T}_r = T_r/r$.

Pour $Y$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbf{E}(Y)$ l'espérance de $Y$ et $\mathbf{V}(Y)$ la variance de $Y$.

On rappelle que si $Y(\Omega) \subset [\![0,r]\!]$ et $h$ est une fonction à valeurs réelles définie sur $[\![0,r]\!]$, alors $h(Y)$ admet une espérance et $\mathbf{E}(h(Y)) = \sum_{k=0}^{r} h(k)\mathbf{P}(Y=k)$.

**5.a)** Donner un exemple de situation probabiliste qui peut être décrite par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r,t)$.

**5.b)** Donner $T_r(\Omega)$ et justifier que, pour tout $k \in [\![0,r]\!]$, on a $\mathbf{P}(T_r = k) = p_{k,r}(t)$.

**5.c)** Donner l'expression simplifiée des quantités suivantes :

$$\mathbf{E}(T_r), \mathbf{E}(\overline{T}_r), \mathbf{V}(T_r), \mathbf{V}(\overline{T}_r), \mathbf{E}(T_r^2) \text{ et } \mathbf{E}((\overline{T}_r)^2)\,;$$

vérifier en particulier que

$$\mathbf{E}((\overline{T}_r)^2) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1).$$

**5.d)** En déduire que les égalités suivantes sont valables pour tout $t \in [0,1]$ :

$$\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t.$$

**5.e)** Montrer que les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**6.** Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est stable par $B_n$.

On note $\widetilde{B}_n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par $B_n$ ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\widetilde{B}_n(P) = B_n(P)$. On note $A_n$ la matrice de $\widetilde{B}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On note aussi

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

**7.** Montrer que

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H.$$

**8.**

**8.a)** La matrice $H$ est-elle diagonalisable ?

**8.b)** Soit $a$ et $b$ deux réels et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que $Q$ est inversible.

**8.c)** Déterminer (sans chercher à calculer $Q^{-1}$) deux réels $a$ et $b$ tels que $H = QDQ^{-1}$.

**9.** On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels $a$ et $b$ ont été choisis de telle sorte que $H = QDQ^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Si une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, notée $(M_\ell)$, converge vers une matrice $M$, on note $\lim_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$. On admet alors que $\lim_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on a : $\lim_{\ell \to +\infty} (M_\ell)_{i,j} = M_{i,j}$.

**9.a)** Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (A_n) = I_3$.

**9.b)** Montrer que l'application $\psi$ définie sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est linéaire.

**9.c)** En déduire que si $\lim_{\ell \to +\infty} (M_\ell) = M$, alors, $\lim_{\ell \to +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}$.

**9.d)** Montrer que $A_n = QD_nQ^{-1}$.

**9.e)** Déterminer explicitement, pour $n \geqslant 2$, $\lim_{\ell \to +\infty} (A_n^\ell)$.

**9.f)** Déterminer explicitement $\lim_{n \to +\infty} (A_n^n)$.

## Partie 3. Analyse et probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f$ une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) - B_n(f)(t) &= \mathbf{E}\big(f(t) - f(\overline{T}_n)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (f(t) - f(k/n))\, p_{k,n}(t). \end{aligned}$$

On pourra utiliser sans démonstration les résultats de cette question 5.

**10.**

**10.a)** Montrer que pour toute variable aléatoire discrète $Y$ admettant une variance, on a l'inégalité suivante : $\mathbf{E}(Y) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$.

**10.b)** En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{E}\left(|t - \overline{T}_n|\right) \leqslant \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

**11.** On suppose dans toute cette question que $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

**11.a)** Justifier l'existence d'un réel $M_f$ tel que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2,\ |f(a)-f(b)| \leqslant M_f\,|a-b|.$$

Dans toute la suite de cette question, on suppose que $M_f$ est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2,\ |f(a)-f(b)| \leqslant M_f\,|a-b|.$$

**11.b)** Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{E}(|f(t)-f(\overline{T}_n)|) \leqslant M_f \sqrt{\frac{t\,(1-t)}{n}}.$$

**11.c)** En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|f(t)-B_n(f)(t)| \leqslant \frac{M_f}{2\sqrt{n}}.$$

**11.d)** Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

## Partie 4. Integrales

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

On reprend les notations de la partie 3 pour $B_n(f)$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat de la question 11.d).

**12.** Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**13.** On note $S_n(f) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

**13.a)** Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x.$$

**13.b)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in [\![0,n]\!]$, le réel $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x$ est indépendant de l'entier $k$ et que $\displaystyle\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

**13.c)** En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**14.** Montrer que le résultat de la question 13.c) reste vrai pour la seule hypothèse que $f$ est continue sur $[0,1]$.

**15.** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a+b \leqslant c-2$.

**15.a)** Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a\,(1+x\,u)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

**15.b)** Montrer que, pour $b \geqslant 1$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^a\,(1+x\,u)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

**15.c)** Montrer que la fonction

$$h \left|\begin{array}{ccc} [0,1[ & \longrightarrow & [0,+\infty[ \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{1-t} \end{array}\right.$$

est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est strictement croissante et bijective.

**15.d)** En utilisant le changement de variable $u = h(t)$, calculer $F(0)$ ; en déduire la valeur de $F(1)$.

## Partie 5. Séries de fonctions

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in [0,1]$, on note :

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si } n \geqslant k \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases}$$

si bien que

$$f_n(t) = \begin{cases} \binom{n}{k}\,t^k\,(1-t)^{n-k} & \text{si } n \geqslant k \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

**16.** Montrer que $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et en déduire, pour tout $t \in\, ]0,1[$, un équivalent de $f_n(t)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**17.** Établir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Pour $t \in [0,1]$, on note $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

**18.** Déterminer $S(t)$ pour $t=0$ et pour $t=1$.

**19.**

**19.a)** Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$.

**19.b)** En déduire que, pour tout $u \in [0,1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}.$$

**19.c)** En déduire que, pour tout $t \in\, ]0,1]$, $S(t) = \dfrac{1}{t}$.

**19.d)** La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$ ?

**Fin de l'énoncé**