Corrigé du premier devoir de révision

1.a. Soit $t \in [0,1]$. Sans difficulté,

$$p_{0,2}(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = 1 - 2t + t^2,$$

$$p_{1,2}(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t - 2t^2,$$

$$p_{2,2}(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2.$$

1.b. Facilement,

$$A(t) = (1-t)\,(0,1) + t\,(1,1) = (t,1),$$

$$B(t) = (1-t)\,(1,1) + t\,(1,0) = (1, 1-t),$$

$$C(t) = (1-t)\,(t,1) + t\,(1,1-t) = (2t - t^2, 1 - t^2).$$

1.c. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)\,A_k &= (1 - 2t + t^2)\,(0,1) \\ &\quad + (2t - 2t^2)\,(1,1) + t^2\,(1,0) \\ &= (2t - t^2, 1 - t^2) = C(t). \end{aligned}$$

2. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathscr{T}$, et $t \in [0,1]$.
D'une part,

$$\begin{aligned} &(1-t)\,(x_1, y_1) + t\,(x_2, y_2) \\ &= \big((1-t)\,x_1 + t\,x_2, (1-t)\,y_1 + t\,y_2\big). \end{aligned}$$

En outre, $(1-t)\,x_1 + t\,x_2$ appartient à $[x_1, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$, selon l'ordre de x_1 et x_2, lequel segment est inclus dans $[0,1]$. Donc $(1-t)\,x_1 + t\,x_2 \in [0,1]$. De même pour $(1-t)\,y_1 + t\,y_2$.

D'autre part, comme $x_1 + y_1 \geqslant 1$ et $x_2 + y_2 \geqslant 1$, et que $t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} &(1-t)\,x_1 + t\,x_2 + (1-t)\,y_1 + t\,y_2 \\ &= (1-t)\,(x_1 + y_1) + t\,(x_2 + y_2) \\ &\geqslant (1-t)\cdot 1 + t \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Donc $(1-t)\,(x_1, y_1) + t\,(x_2, y_2) \in \mathscr{T}$. Comme c'est vrai pour tous (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathscr{T}$ et $t \in [0,1]$, $\mathscr{T}$ est convexe.

3.a. Soit $t \in [0,1]$. Comme $t\,(1-t) \geqslant 0$, on a

$$2t - t^2 + 1 - t^2 = 1 + 2t\,(1-t) \geqslant 1,$$

et $C(t) \in \mathscr{T}$. Ainsi, $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$.

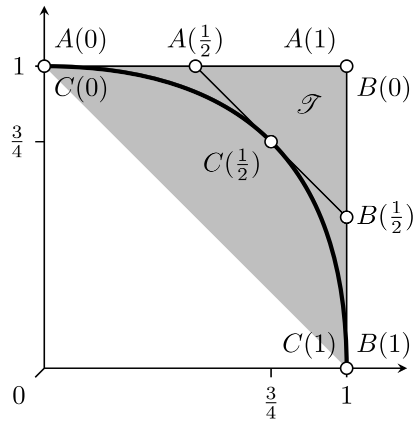
3.b. La tangente $\mathscr{D}_t$ à $\mathscr{C}$ en $C(t)$ est dirigée par le vecteur vitesse, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}(t) = 2\,(1-t, -t)$.

En passant, ce vecteur n'est jamais nul.

3.c. Oui, car $C(t) \in [A(t), B(t)]$ et

$$\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}(t) = 2\,\overrightarrow{A(t)B(t)}.$$

3.d. Avec les résultats précédents, voici le graphe demandé, où le triangle $\mathscr{T}$ est gris, et la courbe (épaisse) est un arc de parabole, et pas de cercle :



4.a. Le caractère linéaire de φ_n et B_n ne pose pas de difficulté.

On voit que $\varphi_n(1) = n\,X$; pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\varphi_n(X^k) = (n-k)\,X^{k+1} + k\,X^k \in \mathbb{R}_n[X] ;$$

et enfin, $\varphi_n(X^n) = n\,X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, les images par φ_n des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont toutes dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $B_n(P)$ est une combinaison linéaire des $p_{k,n}$, tous de degré n, donc $\deg(B_n(P)) \leqslant n$ et $B_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Finalement, φ_n et B_n sont bien des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b. Si $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} p'_{k,n}(X) &= \binom{n}{k} k\,X^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \\ &\quad - \binom{n}{k} (n-k)\,X^k\,(1-X)^{n-k} \end{aligned}$$

puis

$$X(1-X)p'_{k,n}(X) = k(1-X)p_{k,n} - (n-k)Xp_{k,n}(X).$$

On vérifie que cette égalité est encore valable pour $k = 0$ et pour $k = n$ ce qui permet d'obtenir, après simplification, $\varphi_n(p_{k,n}(X)) = k\,p_{k,n}(X)$.

4.c. Pour tout entier k entre 0 et n, $p_{k,n}$ étant de plus non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre k. Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, on en déduit que la famille $\mathscr{F}$ est libre. C'est de plus une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$ donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est alors une base de $\mathbb{R}_n[X]$ composée de vecteurs propres de φ_n donc φ_n est diagonalisable.

4.d. En particulier 0 est valeur propre de φ_n donc $\boxed{\varphi_n \text{ n'est pas bijectif.}}$

Soit P dans le noyau de B_n. Comme la famille $\mathscr{F}$ est libre, pour tout k entre 0 et n, $P(\frac{k}{n}) = 0$: P a donc au moins $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n donc P est le polynôme nul. Par conséquent, B_n est injectif ; il s'agit d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie donc $\boxed{B_n \text{ est bijectif.}}$

5.a. Considérons une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité t et lançons-la successivement r fois. Alors, la variable aléatoire réelle X qui compte le nombre de fois que l'on obtient pile suit la loi binomiale $\mathscr{B}(r, t)$.

5.b. $\boxed{T_r(\Omega) = [\![0, r]\!]}$ et, pour tout k entre 0 et r,

$$\boxed{P(T_r = k) = \binom{k}{r} t^k (1-t)^{r-k} = p_{k,r}(t).}$$

5.c. $\boxed{E(T_r) = r\,t}$ donc par linéarité, $\boxed{E(\overline{T_r}) = t.}$

$\boxed{V(T_r) = r\,t\,(1-t)}$ donc $\boxed{V(\overline{T_r}) = \dfrac{t\,(1-t)}{r}.}$

D'autre part, $V(T_r) = E(T_r^2) - (E(T_r))^2)$ donc

$$\boxed{\begin{aligned} E(T_r^2) &= r\,t\,(1 - t + r\,t), \\ E((\overline{T_r})^2) &= \frac{t\,(1-t+r\,t)}{r} = \Big(1 - \frac{1}{r}\Big)\,t^2 + \frac{1}{r}\,t. \end{aligned}}$$

5.d. $T_r(\Omega) = [\![0, r]\!]$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} P(T_r = k) = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{r} p_{k,r}(t) = 1.}$

D'après la formule de transfert rappelée dans l'énoncé avec $h : y \mapsto \dfrac{y}{r}$, $E(\overline{T_r}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r}\,P(T_r = k)$ d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \frac{k}{r}\,p_{k,r}(t) = t.}$

En utilisant $E((\overline{T_r})^2)$ et $h : y \mapsto \dfrac{y^2}{r^2}$, on a aussi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{r} \Big(\frac{k}{r}\Big)^2 p_{k,r}(t) = \Big(1 - \frac{1}{r}\Big)\,t^2 + \frac{1}{r}\,t.}$$

5.e. Ces trois égalités sont des égalités entre polynômes, valables en une infinité de points donc en tout point t de $\mathbb{R}$ (si, pour tout $t \in [0, 1]$, $P(t) = Q(t)$, alors le polynôme $P - Q$ a une infinité de racines donc il est nul).

6. On sait que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ donc

$\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].}$

En outre, $B_n(1) = 1$, $B_n(X) = X$ et $B_n(X^2) = (1 - \frac{1}{n})\,X^2 + \frac{1}{n}\,X$ donc B_n envoie une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est stable par } B_n.}$

7. On obtient A_n en mettant, en colonnes, les coordonnées de $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$ dans la base $(1, X, X^2)$ donc

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\,I_3 + \frac{1}{n}\,H.}$$

8.a. On voit que $H^2 = H$, donc H est la matrice d'un projecteur, donc $\boxed{H \text{ est diagonalisable.}}$

8.b. Q est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls donc $\boxed{Q \text{ est inversible.}}$

8.c En nommant e_1 et e_2 les deux premiers vecteurs de Q, on voit que $H\,e_1 = e_1$ et $H\,e_2 = e_2$. En outre on voit que les deux dernières colonnes C_2 et C_3 de H sont égales, donc $C_2 - C_3 = 0$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,H$. Comme on veut que la troisième coordonnée de la troisième colonne de Q soit 1, prenons $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, par construction

$\boxed{H = Q\,D\,Q^{-1}, \text{ avec } a = 0 \text{ et } b = -1.}$

9.a. $\boxed{\text{Oui,}}$ car $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

9.b. Soient $(M_1, M_2) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par propriété des opérations matricielles, $\psi(M_1 + \lambda\,M_2) = \psi(M_1) + \lambda\,\psi(M_2)$ donc

$\boxed{\psi \text{ est linéaire.}}$

9.c. ψ est une application linéaire en dimension finie donc elle est continue : si $\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} M_\ell = M$, alors $\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} \psi(M_\ell) = \psi(M)$ c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{\ell \to +\infty} (Q\,M_\ell\,Q^{-1}) = Q\,M\,Q^{-1}.}$$

9.d. On a

$$\begin{aligned} \boxed{A_n} &= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\,I_3 + \frac{1}{n}\,H \\ &= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\,Q\,I_3\,Q^{-1} + \frac{1}{n}\,Q\,D\,Q^{-1} \\ &= Q\,\Big(\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\,I_3 + \frac{1}{n}\,D\Big)\,Q^{-1} \\ &= \boxed{Q\,D_n\,Q^{-1}.} \end{aligned}$$

9.e. Pour $n \geqslant 2$, $0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{\ell} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} D_n^{\ell} = D$. D'après la question 9.c, $\boxed{\displaystyle\lim_{\ell \to +\infty} A_n^{\ell} = Q\,D\,Q^{-1} = H.}$

9.f. Ici, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n^n} = Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1} = Q\,(e^{-1}I_3+(1-e^{-1})D)\,Q^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1-e^{-1}\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}.$$

10.a. Comme $V(Y)\geqslant 0$ et que $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$, on a $E(Y^2)\geqslant E(Y)^2$. Par croissance de la racine carrée, $|E(Y)|\leqslant\sqrt{E(Y^2)}$ et, pour tout réel x, $x\leqslant|x|$ donc $\boxed{E(Y)\leqslant\sqrt{E(Y^2)}}$.

10.b. On applique ce qui précède à $Y=|t-\overline{T_n}|$. Comme $E(\overline{T_n})=t$, $E(Y^2)=V(\overline{T_n})=\dfrac{t\,(1-t)}{n}$ d'après la question 5, donc $\boxed{E(|t-\overline{T_n})|\leqslant\sqrt{\dfrac{t\,(1-t)}{n}}}$.

11.a. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc f' est continue sur le segment $[0,1]$: elle y est donc bornée et $\|f'\|_\infty^{[0,1]}$ est bien définie. D'après l'inégalité des accroissements finis, en posant $\boxed{M_f=\|f'\|_\infty^{[0,1]}}$,

$$\boxed{\forall(a,b)\in[0,1]^2,\ |f(a)-f(b)|\leqslant M_f\,|a-b|.}$$

11.b. Soit $t\in[0,1]$. D'après la question précédente, pour tout $\omega\in\Omega$, $|f(t)-f(\overline{T_n}(w))|\leqslant M_f\,|t-\overline{T_n}|$ ($\overline{T_n}$ ne prend que des valeurs dans $[0,1]$). Par croissance et linéarité de l'espérance, on a $E(|f(t)-f(\overline{T_n})|)\leqslant M_f\,E(|t-\overline{T_n}|)$ et, avec la question 10.b,

$$\boxed{E(|f(t)-f(\overline{T_n})|)\leqslant M_f\sqrt{\frac{t\,(1-t)}{n}}.}$$

11.c. Pour $t\in[0,1]$, $t\,(1-t)=\frac14-(\frac12-t)^2\leqslant\frac14$ donc, en utilisant la question précédente et la remarque de l'énoncé (début de partie 3),

$$\boxed{\forall t\in[0,1],\ |f(t)-B_n(f)(t)|\leqslant\frac{M_f}{2\sqrt{n}}.}$$

11.d. On a majoré $|f-B_n(f)|$ par un majorant indépendant de t qui tend vers 0 avec n donc

| la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. |

12. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et la suite de fonctions $(B_n(f))_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f donc le théorème d'intégration sur un segment s'applique :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

13.a. Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$. Les fonctions $x\mapsto x^a$ et $x\mapsto(1-x)^{b+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,\mathrm{d}x=\Big[-\frac{1}{b+1}\,x^a\,(1-x)^{b+1}\Big]_0^1+\frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x.$$

Comme $a\geqslant 1$ et $b+1\geqslant 1$, le crochet est nul et

$$\boxed{\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b+1}\,\mathrm{d}x.}$$

13.b. Soit k entre 1 et n. La question précédente avec $a=k$ et $b=n-k$ donne

$$\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x=\binom{n}{k}\frac{k}{n-k+1}\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k+1}\,\mathrm{d}x=\binom{n}{k-1}\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 p_{k-1,n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 p_{k,n}(x)\mathrm{d}x$ ne dépend pas de k entre 0 et n. En particulier, elle vaut

$$\int_0^1 p_{n,n}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.$$

Finalement, pour tout k entre 0 et n,

$$\boxed{\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.}$$

13.c. Par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment,

$$\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_0^1 p_{k,n}(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

donc avec la question précédente,

$$\int_0^1 B_n(f)(x)\,\mathrm{d}x=S_n(f).$$

Avec la question 12, on conclut donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

14. On suppose maintenant que f est continue sur $[0,1]$. f est continue en 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}f(1)=0$ et $S_n(f)\sim\dfrac1n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)$. On reconnait alors la suite des sommes de Riemann associée à la fonction continue f sur le segment $[0,1]$ et on retrouve

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

15.a. Soit $x \in [0,1]$ et $f : u \mapsto \dfrac{u^a\,(1+x\,u)^b}{(1+u)^c}$.

a, b et c sont des entiers naturels donc f est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur cet intervalle.

Quand u tend vers l'infini, $f(u) \sim \dfrac{1}{u^{c-a-b}}$; or $c-a-b \geqslant 2 > 1$ donc la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par comparaison, f l'est aussi.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^a\,(1+x\,u)^b}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u$ converge.

15.b. Posons $A = [0,1]$, $I = [0,+\infty[$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,u) \mapsto \frac{u^a\,(1+x\,u)^b}{(1+u)^c}.$$

∘ Pour tout $u \in I$, la fonction $x \mapsto g(x,u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A (car $b \geqslant 1$). De plus, pour tout $(x,u) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,u) = \frac{b\,u^{a+1}\,(1+x\,u)^{b-1}}{(1+u)^c}.$$

∘ Pour tout $x \in A$, la fonction $u \mapsto g(x,u)$ est continue par morceaux sur I et intégrable (question précédente).
∘ Pour tout $x \in A$, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,u)$ est continue par morceaux sur I car $b-1 \geqslant 0$.
∘ Pour $(x,u) \in A \times I$, $0 \leqslant 1 + x\,u \leqslant 1 + u$ donc, comme $b-1 \geqslant 0$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\right| \leqslant \frac{b\,u^{a+1}\,(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c} = \varphi(u).$$

φ est continue par morceaux et positive sur I et, quand u tend vers l'infini, $\varphi(u) \sim \dfrac{b}{u^{c-a-b}}$ avec $c-a-b > 1$ donc φ est intégrable sur I.

D'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre,
- pour tout $x \in A$, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,u)$ est intégrable sur I ;
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$;
- et pour tout $x \in A$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{b\,u^{a+1}\,(1+x\,u)^{b-1}}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u.$$

15.c. Par opérations usuelles, h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$. De plus, pour $t \in [0,1[$, $h'(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} > 0$ donc h croît strictement. Il s'ensuit que

h réalise une bijection de $[0,1[$ dans $h([0,1[) = [0,+\infty[$.

15.d. Comme h est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective, on peut utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$. On obtient alors

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} t^a\,(1-t)^{c-a-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \int_0^1 p_{a,c-2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\binom{c-2}{a}}\,\frac{1}{c-1}.$$

De même,

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\binom{c-b-2}{a}}\,\frac{1}{c-b-1}.$$

16. Pour $n \geqslant k$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
Les entiers n, $n-1$, …, $n-k+1$ sont k termes équivalents à n. k est fixé donc, par produit, $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ quand n tend vers l'infini. En multipliant par $t^k\,(1-t)^{n-k}$, on obtient, pour $t \in]0,1[$,

$$f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k (1-t)^n.$$

17. Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc la série $\sum f_n(0)$ converge. Si $n > k$, $f_n(1) = 0$ donc la série $\sum f_n(1)$ converge. Pour $t \in]0,1[$, on pose $u_n(t) = \dfrac{n^k}{k!}\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^k (1-t)^n$. $u_n(t) > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k (1-t)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = 1-t < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n(t)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(t)$ converge.

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

18. Clairement, $S(0) = 0$ et $S(1) = f_k(1) = 1$.

19.a. Pour tout $u \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

19.b. On dérive k fois cette égalité : pour tout $u \in [0,1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}.$$

19.c. Soit $t \in]0,1[$. En utilisant la définition de $f_n(t)$ et la question précédente,

$$S(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,t^k\,(1-t)^{n-k} = \frac{t^k}{(1-(1-t))^{k+1}} = \frac{1}{t}.$$

19.d. Comme les f_n sont continues sur $[0,1]$ mais que la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ne l'est pas, la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, donc pas non plus normalement.