

Deuxième devoir de révision

[E3A17]

Durée 3 h

L'usage de calculatrices est interdit

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans tout le problème, on note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, O_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{E}$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{E}$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, on note $A^\top$ la matrice transposée de A .

Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{E}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{E}$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = O_n$. En particulier, la matrice nulle O_n est nilpotente.

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}$ qui sont nilpotentes.

QUESTIONS DE COURS

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$? En donner sans justification une base.

2. Soient $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. Calculer le produit des deux matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$.

3. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

4. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

PARTIE 1 : PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Soit A une matrice de $\mathcal{N}$.

1. La matrice A peut-elle être inversible? Justifier votre réponse.

2. On note $\text{Sp}(A)$ le spectre de A , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A .

Déterminer $\text{Sp}(A)$ et donner le polynôme caractéristique de la matrice A .

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

4. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$, est inclus dans $\mathcal{N}$.

5. Vérifier que $A^\top \in \mathcal{N}$.

6. Montrer que si M est semblable à A , alors $M \in \mathcal{N}$.

7. Montrer que $A^n = O_n$.

8. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathcal{E}$ soit nilpotente est que : $M^n = O_n$.

On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.

9. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le rang maximal de la matrice A ?

10. Soient B et C dans $\mathcal{E}$.

10.1. On suppose que $BC \in \mathcal{N}$. Prouver qu'alors $CB \in \mathcal{N}$.

10.2. Ici, on suppose de plus que l'on a : $B \in \mathcal{N}$ et $AB = BA$.

Montrer que $AB \in \mathcal{N}$ et que $A + B \in \mathcal{N}$.

11. Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques réelles appartenant à $\mathcal{N}$.

12. Dans cette question, on suppose que la matrice nilpotente A est antisymétrique.

12.1. Montrer que $A^2 = O_n$.

12.2. En déduire l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathcal{N}$. On pourra utiliser la trace.

PARTIE 2 : EXEMPLES

Dans cette partie, M est une matrice de $\mathcal{E}$.

1. Dans cette question, on prend $M = (m_{ij}) \in \mathcal{E}$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice M .

1.2. On pose $S = M + M^\top$. A-t-on $S \in \mathcal{N}$?

Montrer que $S^2 \in \text{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les éléments propres de la matrice S .

1.3. $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

2. Dans cette question, on prend $n = 2$.

2.1. On suppose que M est de rang 1.

Montrer que $M^2 = \text{Tr}(M)M$. En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

2.2. Déterminer une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

2.3. En déduire l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

PARTIE 3 : SOUS-ESPACE ENGENDRÉ PAR $\mathcal{N}$

Soient

- T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices de trace nulle
- V le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{N}$: $V = \text{Vect}(\mathcal{N})$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathcal{N}$.

1. Déterminer la dimension de T_0 .

2. Prouver que $\mathcal{N}$ et V sont inclus dans T_0 .

3. Pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note :

- $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$
- $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$

3.1. Calculer F_j^2 .

3.2. Montrer que $G_j \in V$.

3.3. Soit $\mathcal{F}$ la famille de matrices de $\mathcal{E}$ constituée de toutes les matrices $E_{i,j}$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ où $i \neq j$ et de toutes les matrices G_k pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans V .

3.4. En déduire que $V = T_0$.

PARTIE 4 : SOUS-ESPACES DE DIMENSION MAXIMALE CONTENUS DANS $\mathcal{N}$

On note $\mathcal{T}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée uniquement de 0.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_1$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$.

On pourra utiliser les résultats de la partie 1.

3. Démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$ dont la dimension est notée d .

4.1. On suppose que $d > \frac{n(n-1)}{2}$.

Démontrer que l'on a : $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.
Conclure.

4.2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{N}$?

Donner un exemple de tel sous-espace.

PARTIE 5 : UN PEU DE TOPOLOGIE

$\mathcal{E}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{E}$.

2. Soient $A \in \mathcal{N}$, α un réel non nul et $M = I_n + \alpha A$.
Montrer que $\det(M) = 1$.

En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que l'intérieur de $\mathcal{N}$ est vide.

3. Soit F un sous-espace de $\mathcal{E}$. Montrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F = \mathcal{E}$.

Retrouver alors le résultat de la question précédente.

PARTIE 6 : DEUX AUTRES RÉSULTATS

Soient $A \in \mathcal{N}$, α un réel non nul et $M = I_n + \alpha A$.

1. On sait que M est inversible. Calculer son inverse à l'aide des puissances de la matrice A . On pourra utiliser une suite géométrique.

2. Donner sans démonstration le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.

3. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{E}$ telle que $B^2 = M$.

On exprimera B comme un polynôme de la matrice A .