Troisième devoir de révision

Fonctions d'endomorphismes

[MP12]
Durée : trois heures
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Dans ce texte, on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour tout entier n strictement positif on note $\mathfrak{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$; l'identité de $\mathfrak{L}_n$ est notée I. Le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^n$ est noté (x, y) et la norme associée $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Si $\mathrm{S} \in \mathfrak{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de S est noté $\sigma(\mathrm{S})$. On définit la fonction $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante :

$$(1) \qquad \mathcal{Q}_\mathrm{S}(x) = \frac{(\mathrm{S}(x), x)}{\|x\|^2} ;$$

c'est le quotient de Rayleigh de S.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$ le minimum et le maximum de $\sigma(\mathrm{T})$. On dit que $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$ est un endomorphisme positif (resp. strictement positif) si $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, on a $(\mathrm{T}(x), x) \geqslant 0$ (resp. $(\mathrm{T}(x), x) > 0$). L'ensemble des endomorphismes positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{+*}$).

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques

Dans cette partie on considère $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$.

Question 1 *Soient T_1 et T_2 appartenant à $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n$.*

Question 2 *Montrer que $\mathcal{Q}_\mathrm{T} : \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\} \to \boldsymbol{R}$ atteint les valeurs $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$.*

Question 3 *Démontrer que l'on a*

$$(2) \qquad \begin{cases} m(\mathrm{T}) = \displaystyle\min_{x \in \boldsymbol{R}^n, x \neq 0} \mathcal{Q}_\mathrm{T}(x), \\ M(\mathrm{T}) = \displaystyle\max_{x \in \boldsymbol{R}^n, x \neq 0} \mathcal{Q}_\mathrm{T}(x). \end{cases}$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T.

Question 4 *Montrer que $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ si et seulement si $\sigma(\mathrm{T}) \subset \boldsymbol{R}^+$ (resp. $\sigma(\mathrm{T}) \subset \boldsymbol{R}^{+*}$).*

Soit J un intervalle contenant $\sigma(\mathrm{T})$ et f une fonction définie sur J, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Question 5 *Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire U telle que*

$$(3) \qquad \mathrm{U}(y) = f(\lambda)\, y,\ \forall \lambda \in \sigma(\mathrm{T}), \forall y \in \ker(\mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{I}),$$

et que $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$.

On notera $\mathrm{U} = f(\mathrm{T})$ l'endomorphisme symétrique ainsi défini, ce qui conduit à considérer f comme une application de $\mathcal{S}_n$ dans lui même.

Question 6 *Soit p la restriction à J d'une fonction polynomiale à coefficients réels ; on note $p(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j\, t^j$, avec $\alpha_j \in \boldsymbol{R}$ pour tout j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant k$. Démontrer que l'endomorphisme symétrique $p(\mathrm{T})$ est égal à $\alpha_0\, \mathrm{I} + \sum_{j=1}^k \alpha_j\, \mathrm{T}^j$ où*

$$\mathrm{T}^j = \underbrace{\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \cdots \circ \mathrm{T}}_{j \text{ fois}}.$$

Question 7 *Y-a-t-il des fonctions $g : J \to \boldsymbol{R}$ telles que $g(\mathrm{T})$ ne soit pas égal à un polynôme en T ?*

Question 8 *Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $f(\mathrm{T})$ en fonction de ceux de T.*

Question 9 *Pour des fonctions f et g définies sur l'intervalle J, démontrer que $(f\, g)(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T})$.*

Question 10 *On considère $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t}$. Montrer que $f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}^{-1}$ (inverse de l'endomorphisme S).*

Question 11 *On considère $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+$. Lorsque $f(t) = \sqrt{t}$, on note $\sqrt{\mathrm{S}}$ l'endomorphisme $f(\mathrm{S})$. Montrer que $\sqrt{\mathrm{S}}$ est bien défini et que $(\sqrt{\mathrm{S}})^2 = \mathrm{S}$. En admettant que toutes les valeurs propres de S sont simples, combien y-a-t-il de solutions C dans $\mathcal{S}_n^+$, puis dans $\mathcal{S}_n$, à l'équation $\mathrm{C}^2 = \mathrm{S}$?*

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. On note $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$ si et seulement si $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \in \mathcal{S}_n^+$.

Question 12 *Démontrer que la relation $\geqslant$ définit une relation d'ordre dans $\mathcal{S}_n$. Est-elle totale ?*

Question 13 *Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$. Démontrer que si $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$ alors $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U} \geqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$.*

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$. On dit que la fonction $f : J \to \mathbf{R}$ définit un opérateur croissant si pour tout T_1 et tout T_2, endomorphismes symétriques vérifiant $\sigma(\mathrm{T}_1) \subset J$ et $\sigma(\mathrm{T}_2) \subset J$, alors

$$(4) \qquad \mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 \Longrightarrow f(\mathrm{T}_2) \geqslant f(\mathrm{T}_1).$$

Question 14 *Démontrer que l'application $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ donnée par $f(t) = t^2$ ne définit pas un opérateur croissant.*

On pourra, à cet effet, considérer les endomorphisme T_1 et T_2 de matrices respectives

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dans la base canonique.

Question 15 *Soient T_1 et $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n^{+*}$ tels que $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$. En s'aidant de la question 13 avec $\mathrm{U} = \mathrm{T}_2^{-1/2}$, montrer que les valeurs propres de $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$ sont inférieures ou égales à 1. En déduire que $\mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1} \geqslant \mathrm{I}$, puis que l'application $f : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ donnée par $f(t) = -1/t$ définit un opérateur croissant.*

Question 16 *Soient T_1 et $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n^{+}$ tels que $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$. Démontrer que les valeurs propres de $\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1/2}$ sont positives. En déduire que l'application $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ donnée par $f(t) = \sqrt{t}$ définit un opérateur croissant.*

3 Inégalité de Löwner-Heinz

On va montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la fonction $\varphi_a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi_a(t) = t^a$ définit un opérateur croissant. Pour $u \in \mathbf{R}^+$, on note $f_u : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f_u(t) = \frac{t}{t+u}.$$

Question 17 *Démontrer que f_u définit un opérateur croissant. On pourra s'aider de la question 15.*

Soient φ une application de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathfrak{L}_n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{R}^n$. On note $\Phi(s)$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi(s)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(\Phi(s)_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les applications coordonnées de $\Phi(s)$. On dira que φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ si les fonctions coordonnées $s \mapsto \Phi(s)_{i,j}$ le sont. Par définition, on notera $\int_0^{+\infty} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ a pour coefficients les $\int_0^{+\infty} \Phi(s)_{i,j}\,\mathrm{d}s$. Cette matrice sera notée $\int_0^{+\infty} \Phi(s)\,\mathrm{d}s$.

Question 18 *Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.*

On considère $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et $a \in]0,1[$.

Question 19 *Montrer que la fonction φ à valeurs dans $\mathfrak{L}_n$ définie par $\varphi(u) = f_u(\mathrm{S})\,u^{a-1}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On pourra trouver utile de faire appel à une base orthonormée adaptée à S.*

On admet que

$$t^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(t)\,u^{a-1}\,\mathrm{d}u. \tag{6}$$

Question 20 *Montrer que*

$$\mathrm{S}^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{S})\,u^{a-1}\,\mathrm{d}u. \tag{7}$$

Question 21 *En déduire que la fonction φ_a définit un opérateur croissant.*

Fin de l'épreuve