

# Corrigé du troisième devoir de révision

1. Soient  $T_1$  et  $T_2$  dans  $\mathcal{S}_n$ . Pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ ,

$$\begin{aligned} ((T_1 + T_2)(x), y) &= (T_1(x), y) + (T_2(x), y) \\ &= (x, T_1(y)) + (x, T_2(y)) \\ &= (x, (T_1 + T_2)(y)), \end{aligned}$$

donc  $T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$ .

2. Soit  $\lambda \in \sigma(T)$  une valeur propre de  $T$  et  $x$  un vecteur propre associé. Comme  $x \neq 0$ , on a

$$Q_T(x) = \frac{(T(x), x)}{\|x\|^2} = \frac{(\lambda x, x)}{\|x\|^2} = \lambda \frac{(x, x)}{\|x\|^2} = \lambda.$$

Ainsi,  $Q_T$  atteint toutes les valeurs propres de  $T$  :

en particulier,  $Q_T$  atteint  $m(T)$  et  $M(T)$ .

3. Nommons  $m(T) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = M(T)$  les valeurs propres de  $T$ , non nécessairement distinctes. Et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres associés : une telle base existe car  $T$  est symétrique. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  qui s'écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , sachant que  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée, on a

$$\begin{aligned} Q_T(x) &= \frac{(T(x), x)}{\|x\|^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{i=1}^n x_i e_i)}{\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|^2} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}; \end{aligned}$$

donc on peut encadrer  $m(T) \leq Q_T(x) \leq M(T)$ , puisque pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $m(T) \leq \lambda_i \leq M(T)$ . Et comme  $m(T)$  et  $M(T)$  sont atteints, on a bien

$m(T) = \min Q_T$  et  $M(T) = \max Q_T$ .

4. Si  $T \in \mathcal{S}_n^+$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(T(x), x) \geq 0$ , donc si  $x \neq 0$ ,  $Q_T(x) \geq 0$ . Or  $m(T) = \min_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} Q_T$ , donc  $m(T) \geq 0$ . Mais  $m(T) = \min \sigma(T)$  donc  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ .

Réciproquement, si  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ ,  $m(T) \geq 0$  donc pour tout  $x \neq 0$ ,  $Q(x) \geq 0$ , d'où  $(T(x), x) \geq 0$  et  $T \in \mathcal{S}_n^+$ .

Ainsi,  $T \in \mathcal{S}_n^+$  si et seulement si  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ .

Le même raisonnement permet d'affirmer que

$T \in \mathcal{S}_n^{+*}$  si et seulement si  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$ .

5. Dans cette question, pour alléger les indices, on écrira «  $\lambda$  » pour «  $\lambda \in \sigma(T)$  ». On fera de même avec «  $\mu$  » si nécessaire.

Raisonnons par analyse-synthèse.

PRÉAMBULE. Comme  $T \in \mathcal{S}_n$ , d'après le théorème spectral,  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}(T)$ , et les  $E_{\lambda}(T)$  sont orthogonaux. Alors d'une part,

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \exists!(x_{\lambda})_{\lambda} \in \prod_{\lambda} E_{\lambda}(T), \quad x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}.$$

Et d'autre part, pour tous  $\lambda \neq \mu$  dans  $\sigma(T)$  et pour tous  $x \in E_{\lambda}(T)$  et  $y \in E_{\mu}(T)$ ,  $(x, y) = 0$ .

ANALYSE. Supposons qu'il existe  $U \in \mathcal{S}_n$  tel que

$$(3) \quad \forall \lambda \in \sigma(T), \forall y \in E_{\lambda}(T), \quad U(y) = f(\lambda)y.$$

Alors, avec la linéarité et la propriété (3) supposée,

$$U(x) = \sum_{\lambda} U(x_{\lambda}) = \sum_{\lambda} f(\lambda)x_{\lambda}.$$

SYNTHÈSE. Considérons l'application  $U$  définie comme suit : pour  $x \in \mathbb{R}^n$  qui se décompose de façon unique en  $x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}$  d'après (\*), posons

$$U(x) = \sum_{\lambda} f(\lambda)x_{\lambda}.$$

*Définition.* Cette définition est valide, car l'écriture donnée par (\*) est unique.

*Linéarité.* Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Écrivons de façon unique  $x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}$  et  $y = \sum_{\lambda} y_{\lambda}$  d'après (\*).

Comme on s'intéresse à  $U(x + \alpha y)$ , introduisons  $z = x + \alpha y$ . Avec (\*), il s'écrit de façon unique  $z = \sum_{\lambda} z_{\lambda}$ . Mais on a aussi

$$z = x + \alpha y = \sum_{\lambda} x_{\lambda} + \alpha \sum_{\lambda} y_{\lambda} = \sum_{\lambda} (x_{\lambda} + \alpha y_{\lambda}).$$

Par unicité d'une telle décomposition, puisque  $x_{\lambda} + \alpha y_{\lambda} \in E_{\lambda}(T)$ , on en tire que  $z_{\lambda} = x_{\lambda} + \alpha y_{\lambda}$ . Alors

$$\begin{aligned} U(x + \alpha y) &= \sum_{\lambda} f(\lambda)z_{\lambda} = \sum_{\lambda} f(\lambda)(x_{\lambda} + \alpha y_{\lambda}) \\ &= \sum_{\lambda} f(\lambda)x_{\lambda} + \sum_{\lambda} f(\lambda)\alpha y_{\lambda} \\ &= U(x) + \alpha U(y). \end{aligned}$$

Ainsi,  $U$  est bien linéaire.

*Symétrie.* Gardons  $x$  et  $y$  comme ci-dessus. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} (U(x), y) &= (\sum_{\lambda} f(\lambda)x_{\lambda}, \sum_{\mu} y_{\mu}) \\ &= \sum_{\lambda, \mu} f(\lambda)(x_{\lambda}, y_{\mu}). \end{aligned}$$

Avec l'orthogonalité des  $E_{\lambda}(T)$ ,  $(x_{\lambda}, y_{\mu}) = 0$  si  $\lambda \neq \mu$ , donc

$$(U(x), y) = \sum_{\lambda} f(\lambda)(x_{\lambda}, y_{\lambda}).$$

Puisque cette expression est symétrique en  $x$  et  $y$ ,

$$(U(x), y) = (x, U(y)).$$

Ainsi,  $U$  est bien symétrique.

*Propriété (3).* Soient  $\lambda \in \sigma(T)$  et  $y \in E_{\lambda}(T)$ . Par unicité de la décomposition  $y = \sum_{\mu} y_{\mu}$  d'après (\*), si  $\mu \neq \lambda$ ,  $y_{\mu} = 0$ , et  $y_{\lambda} = y$ . Donc

$$U(y) = \sum_{\mu} f(\mu)y_{\mu} = f(\lambda)y_{\lambda} = f(\lambda)y.$$

CONCLUSION. Par analyse-synthèse, il existe un unique  $U \in \mathcal{S}_n$  qui vérifie la propriété (3).

6. Oui, grâce à l'unicité démontrée ci-dessus, puisque  $p(T)$  et  $\sum_{j=0}^k \alpha_k T^k$  coïncident sur les  $E_{\lambda}(T)$ .

**7.** Non. Prouvons-le.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres *distinctes* de  $T$ . Soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Par construction, d'après la question 5,  $g(T)$  est entièrement déterminé par les  $g(\lambda_i)$ . D'après l'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme  $p$  de degré inférieur ou égal à  $k$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $p(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ . Alors, grâce à l'unicité invoquée,  $p(T) = g(T)$ , et  $g(T)$  est un polynôme en  $T$  d'après la question 6.

**8.** Par construction à la question 5,

les vecteurs propres de  $T$  associés à  $\lambda \in \sigma(T)$  sont aussi propres pour  $f(T)$  associés à  $f(\lambda)$ .

Et comme  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda(T)$ ,  $f(T)$  n'a pas d'autre vecteur propre, donc pas non plus d'autre valeur propre.

**9.** D'après la question 7, il existe des polynômes  $p$  et  $q$  tels que  $f(T) = p(T)$  et  $g(T) = q(T)$ . Alors

$$\underline{(fg)(T) = (pq)(T) = p(T) \circ q(T) = f(T) \circ g(T)}.$$

**10.** Oui, car  $f(\lambda) = 1/\lambda$ , pour tout  $\lambda \in \sigma(s)$ . Constatons que cela est permis car  $\sigma(s) \subset \mathbb{R}^{+*}$  et que  $f$  est bien définie sur  $\sigma(s)$ .

**11.** Comme  $\sigma(s) \subset \mathbb{R}^+$ ,  $f$  est définie sur  $\sigma(s)$  donc  $\sqrt{s}$  est bien définie. De plus, comme  $f \cdot f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  et que  $\text{id}_{\mathbb{R}}(s) = s$ , avec la question 9, on a

$$(f \cdot f)(s) = f(s) \circ f(s) = s$$

c'est-à-dire  $f(s)^2 = s$ .

$\sqrt{s}$  est bien définie et  $(\sqrt{s})^2 = s$ .

L'équation  $c^2 = s$  admet évidemment comme solution  $c = \sqrt{s}$ , laquelle est bien dans  $\mathcal{S}_n^+$  puisque ses valeurs propres sont les racines carrées, par essence positives, de celles de  $s$ . C'est donc la seule de  $\mathcal{S}_n^+$ , grâce à l'unicité de la question 5.

En revanche, si l'on permet des valeurs propres non positives, en choisissant  $\pm\sqrt{\lambda}$  ( $\lambda \in \sigma(T)$ ) comme valeurs propres de  $c$ , il y a  $2^n$  choix possibles.

L'équation  $c^2 = s$  admet une seule solution dans  $\mathcal{S}_n^+$  et  $2^n$  dans  $\mathcal{S}_n$ .

**12.** Soient  $T_1, T_2$  et  $T_3$  dans  $\mathcal{S}_n$ .

REMARQUE. Pour le confort de la suite, interprétons différemment la définition :

$$\begin{aligned} T_2 \geq T_1 &\iff T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_n^+ \\ &\iff \sigma(T_2 - T_1) \subset \mathbb{R}^+ \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, ((T_2 - T_1)(x), x) \geq 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, (T_2(x), x) - (T_1(x), x) \geq 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, (T_2(x), x) \geq (T_1(x), x). \end{aligned}$$

*Réflexivité.* Bien-sûr,  $T_1 \geq T_1$ , car pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(T_1(x), x) \geq (T_1(x), x)$ . La relation  $\geq$  est réflexive.

*Antisymétrie.* Si  $T_2 \geq T_1$  et  $T_1 \geq T_2$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $((T_2 - T_1)(x), x) \geq 0$  et  $((T_2 - T_1)(x), x) \leq 0$ , donc  $((T_2 - T_1)(x), x) = 0$ . Alors  $\mathcal{Q}_{T_2 - T_1} = 0$  donc d'après la question 3,  $m(T_2 - T_1) = M(T_2 - T_1) = 0$ , d'où  $\sigma(T_2 - T_1) = \{0\}$ . Ainsi,  $T_2 - T_1$  est diagonalisable avec pour seule valeur propre 0, c'est l'endomorphisme nul :  $T_2 - T_1 = 0$  et  $T_2 = T_1$ . La relation  $\geq$  est antisymétrique.

*Transitivité.* Si  $T_2 \geq T_1$  et  $T_3 \geq T_2$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(T_2(x), x) \geq (T_1(x), x)$  et  $(T_3(x), x) \geq (T_2(x), x)$ , donc  $(T_3(x), x) \geq (T_1(x), x)$  et  $T_3 \geq T_1$ . La relation  $\geq$  est transitive.

*Comparabilité.* Enfin, en prenant  $n = 2$ ,  $T_1$  représenté dans la base canonique par la matrice  $\text{diag}(2, 1)$  et  $T_2$  par  $\text{diag}(1, 2)$ , alors  $T_2 - T_1$  a pour matrice  $\text{diag}(-1, 1)$  et n'est ni positif ni négatif. Donc  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas comparables.

La relation  $\geq$  est une relation d'ordre non total dans  $\mathcal{S}_n$ .

SUPPLÉMENT. Pour manier plus aisément cette relation d'ordre dans la suite, constatons que

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{S}_n^3, \\ T_2 \geq T_1 &\implies \alpha T_2 \geq \alpha T_1, \\ T_2 \geq T_1 &\implies T_2 + T_3 \geq T_1 + T_3. \end{aligned}$$

C'est immédiat en utilisant les produits scalaires, grâce à la remarque précédente.

**13.** Comme  $U$  est symétrique et que  $T_2 \geq T_1$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} (U \circ T_2 \circ U(x), x) &= (T_2 \circ U(x), U(x)) \\ &\geq (T_1 \circ U(x), U(x)) = (U \circ T_1 \circ U(x), x) \end{aligned}$$

et  $U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U$ .

**14.** Tout d'abord,

$$M_2 - M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc  $\sigma(T_2 - T_1) \subset \mathbb{R}^+$  et  $T_2 \geq T_1$ .

D'après la question 6, la matrice de  $T_1^2$  est  $M_1^2$ ; de même pour  $T_2$ . Alors,

$$M_2^2 - M_1^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est  $-1$ , qui vaut le produit des valeurs propres, donc l'une est négative et  $T_2^2 - T_1^2 \notin \mathcal{S}_n^+$ , donc  $T_2^2 \not\geq T_1^2$  et

l'opérateur défini par  $t \mapsto t^2$  n'est pas croissant.

15. Notons  $f : t \mapsto 1/\sqrt{t}$ . D'après la question 9,

$$\begin{aligned} U \circ T_2 \circ U &= T_2^{-1/2} \circ T_2 \circ T_2^{-1/2} \\ &= f(T_2) \circ \text{id}_{\mathbb{R}}(T_2) \circ f(T_2) \\ &= (f \cdot \text{id}_{\mathbb{R}} \cdot f)(T_2) \\ &= (t \mapsto 1)(T_2) = I. \end{aligned}$$

D'après la question 13, comme  $T_2 \geq T_1$ ,  $U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U$ , d'où  $I \geq U \circ T_1 \circ U$ , ce qui signifie que les valeurs propres de  $I - U \circ T_1 \circ U$  sont positives, ou encore que celles de  $U \circ T_1 \circ U$  sont inférieures ou égales à 1.

Alors, les valeurs propres de  $(U \circ T_1 \circ U)^{-1}$ , qui sont les inverses des précédentes, sont supérieures ou égales à 1, donc  $(U \circ T_1 \circ U)^{-1} \geq I$ , c'est-à-dire  $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I$ .

Toujours avec la question 13, on en tire que

$$U \circ U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \circ U \geq U \circ I \circ U$$

ou encore  $T_1^{-1} \geq U^2 = (T_2^{-1/2})^2 = T_2^{-1}$ .

Ainsi,  $-T_1^{-1} \leq -T_2^{-1}$  et l'opérateur défini par  $t \mapsto -1/t$  est croissant.

16. Si l'on avait des nombres, ou même si les endomorphismes commutaient, on pourrait dire

$$T_2 - T_1 = (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}) \circ (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}).$$

Ce n'est peut-être pas vrai mais l'on peut s'en inspirer : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , puisque les endomorphismes manipulés sont symétriques, on a

$$\begin{aligned} &((\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}) \circ (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}))(x), x) \\ &= ((\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(x), (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})(x)) \\ &= (\sqrt{T_2}(x), \sqrt{T_2}(x)) - (\sqrt{T_1}(x), \sqrt{T_2}(x)) \\ &\quad + (\sqrt{T_2}(x), \sqrt{T_1}(x)) - (\sqrt{T_1}(x), \sqrt{T_1}(x)) \\ &= (\sqrt{T_2} \circ \sqrt{T_2}(x), x) - (\sqrt{T_1} \circ \sqrt{T_1}(x), x) \\ &= (T_2(x), x) - (T_1(x), x) \geq 0, \end{aligned}$$

d'après la question 11, et parce que par hypothèse  $T_2 \geq T_1$ . Si l'on considère maintenant une valeur propre  $\lambda$  de  $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$  et un vecteur propre  $x$  associé, on a donc

$$\begin{aligned} &((\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(x), (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})(x)) \\ &= \lambda(x, (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Or  $(x, (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})(x)) \geq 0$ , donc on peut conclure que  $\lambda \geq 0$  si  $(x, (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})(x)) > 0$ . Mais, en supposant que  $(x, (\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})(x)) = 0$ , on a  $(x, \sqrt{T_2}(x)) = -(x, \sqrt{T_1}(x))$  d'où

$$((\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(x), x) = 2(\sqrt{T_2}(x), x) \geq 0.$$

Mais par ailleurs,  $((\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(x), x) = \lambda \|x\|^2$  donc  $\lambda \geq 0$ . Dans tous les cas,  $\lambda \geq 0$ , donc

$\sigma(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) \subset \mathbb{R}^+$ , donc  $\sqrt{T_2} \geq \sqrt{T_1}$  et l'opérateur défini par  $t \mapsto \sqrt{t}$  est croissant.

17. Soit  $u \in \mathbb{R}_+$ . D'après l'énoncé,  $f_u$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , donc si  $T \in \mathcal{S}_n$ , pour envisager de parler de  $f_u(T)$ , il est déjà nécessaire que  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$ , donc que  $T \in \mathcal{S}_n^{+*}$ .

Si  $u = 0$ ,  $f_0 : t \mapsto 1$ . Dans ce cas, pour  $T_1$  et  $T_2$  dans  $\mathcal{S}_n^{+*}$ ,  $f_0(T_1) = I$  et  $f_0(T_2) = I$ , donc

$$T_2 \geq T_1 \implies f_0(T_2) \geq f_0(T_1).$$

Soit  $u \in \mathbb{R}^{+*}$ . Tout d'abord, pour tout  $t > 0$ ,

$$f_u(t) = \frac{t + u - u}{t + u} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{u}}.$$

Soit  $T \in \mathcal{S}_n^{+*} : \sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$ . Alors  $I + \frac{1}{u}T$  est inversible car  $-\frac{1}{u} < 0$  donc  $-\frac{1}{u} \notin \sigma(T)$ . Alors

$$f_u(T) = I - (I + \frac{1}{u}T)^{-1}.$$

Pour  $T_1$  et  $T_2$  dans  $\mathcal{S}_n^{+*}$ , avec les remarques de la question 12 et la question 15, on a

$$\begin{aligned} T_2 \geq T_1 &\implies \frac{1}{u}T_2 \geq \frac{1}{u}T_1 \\ &\implies I + \frac{1}{u}T_2 \geq I + \frac{1}{u}T_1 \\ &\implies -(I + \frac{1}{u}T_2)^{-1} \geq -(I + \frac{1}{u}T_1)^{-1} \\ &\implies I - (I + \frac{1}{u}T_2)^{-1} \geq I - (I + \frac{1}{u}T_1)^{-1} \\ &\implies f_u(T_2) \geq f_u(T_1). \end{aligned}$$

18. Si l'on change de base, il existera une matrice de passage  $P$  telle que la nouvelle matrice soit

$$\Psi = P^{-1}\Phi P.$$

Cela signifie que les coefficients  $\Psi_{ij}$  de cette matrice sont des combinaisons linéaires des coefficients  $\Phi_{ij}$  de l'ancienne matrice. Alors, leur caractère continu et intégrable est acquis. De plus, en intégrant, on ne change pas les combinaisons linéaires, par linéarité de l'intégrale, donc on aura

$$\int_0^{+\infty} \Psi(s) ds = P^{-1} \left( \int_0^{+\infty} \Phi(s) ds \right) P.$$

Ainsi, la matrice  $\int_0^{+\infty} \Psi(s) ds$  représente bien le même endomorphisme que  $\int_0^{+\infty} \Phi(s) ds$ , mais dans la nouvelle base.

La définition de l'endomorphisme  $\int_0^{+\infty} \varphi(s) ds$  ne dépend donc pas de la base choisie pour le représenter.

19. D'après la question 5, il suffit de travailler sur les fonctions  $g_\lambda : u \mapsto f_u(\lambda)u^{a-1}$ , pour  $\lambda$  parcourant  $\sigma(s)$ . Soit un tel  $\lambda > 0$ . La fonction  $g_\lambda$  est évidemment continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . En 0,

$$g_\lambda(u) \sim u^{a-1} = \frac{1}{u^{1-a}},$$

où la fonction  $u \mapsto 1/u^{1-a}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  car  $1 - a < 1$ , donc  $g_\lambda$  l'est aussi. En  $+\infty$ ,

$$g_\lambda(u) \sim \frac{\lambda}{u^{2-a}},$$

où la fonction  $u \mapsto 1/u^{2-a}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  car  $2 - a > 1$ , donc  $g_\lambda$  l'est aussi. Finalement,  $g_\lambda$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  pour tout  $\lambda \in \sigma(s)$ ,

donc  $\varphi$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**20.** En travaillant à nouveau sur le spectre, pour tout  $\lambda \in \sigma(s)$ ,

$$\lambda^a = \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\lambda) u^{a-1} du,$$

donc, toujours d'après 5,

$$\boxed{s^a = \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(s) u^{a-1} du.}$$

**21.** Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $\mathcal{S}_n^+$ , continues, intégrables sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et telles que pour tout  $s \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\varphi(s) \geq \psi(s)$ , alors

$$\int_0^{+\infty} \varphi(s) ds \geq \int_0^{+\infty} \psi(s) ds.$$

En effet, fixons une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $s \in \mathbb{R}^{+*}$ , on a

$$(\varphi(s)(x), x) \geq (\psi(s)(x), x),$$

ce qui donne, en notant  $X$ ,  $\Phi(s)$  et  $\Psi(s)$  les matrices respectives de  $x$ ,  $\varphi(s)$  et  $\psi(s)$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,

$$X^\top \Phi(s) X \geq X^\top \Psi(s) X.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^{+\infty} X^\top \Phi(s) X ds \geq \int_0^{+\infty} X^\top \Psi(s) X ds,$$

étant entendu qu'on fait le calcul pour chaque coordonnée. Du coup, puisque  $X$  ne dépend pas de  $s$ ,

$$X^\top \left( \int_0^{+\infty} \Phi(s) ds \right) X \geq X^\top \left( \int_0^{+\infty} \Psi(s) ds \right) X,$$

ce qui traduit

$$\left( \left( \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds \right) (x), x \right) \geq \left( \left( \int_0^{+\infty} \psi(s) ds \right) (x), x \right),$$

ce que l'on voulait.

Alors, pour tous  $T_1$  et  $T_2$  dans  $\mathcal{S}_n^+$ ,

$$\begin{aligned} \boxed{T_2 \geq T_1} &\implies \forall u \in \mathbb{R}^{+*}, f_u(T_2) \geq f_u(T_1) \\ &\implies \forall u \in \mathbb{R}^{+*}, f_u(T_2) u^{a-1} \geq f_u(T_1) u^{a-1} \\ &\implies \int_0^{+\infty} f_u(T_2) u^{a-1} du \geq \int_0^{+\infty} f_u(T_1) u^{a-1} du \\ &\implies \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(T_2) u^{a-1} du \\ &\geq \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(T_1) u^{a-1} du \\ &\implies \boxed{T_2^a \geq T_1^a}. \end{aligned}$$

La dernière étape est permise puisque  $a \in ]0, 1[$  donc  $\sin a \pi > 0$ .