Cinquième devoir de révision

[d'après CCP98]
Les calculatrices sont autorisées

Notations et objectifs

Étant donné un intervalle J de $\mathbf{R}$ et une fonction f à valeurs réelles, continue par morceaux et intégrable sur J, on note $\int_J f(x)\,\mathrm{d}x$ l'intégrale de f sur J.

On désigne par

— α un nombre réel ;

— φ_α la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$$

lorsque $x > 0$ et $\varphi_\alpha(0) = 0$;

— h la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$h(x,t) = \frac{\sin(x\,t)}{e^x - 1}$$

lorsque $x \neq 0$ et $h(0,t) = t$.

On note

$$I(\alpha) = \int_{[0,+\infty[} \varphi_\alpha(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\Gamma(\alpha) = \int_{]0,+\infty[} e^{-x}\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x,$$
$$H(t) = \int_{[0,+\infty[} h(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Lorsque la série $\sum 1/n^\alpha$ converge, on note

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction H. La première partie fournit l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide des fonctions Γ et ζ. Dans la deuxième partie on étudie la fonction H. La troisième partie exploite les résultats obtenus dans les deux premières parties.

Préliminaires

P.1/ Préciser, sans justification, l'ensemble de définition $D(\zeta)$ de la fonction ζ.

P.2/ Préciser, sans justification, l'ensemble $D(\Gamma)$ des réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{-x}\,x^{\alpha-1}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$.

P.3/ Pour $\alpha - 1 \in D(\Gamma)$, établir la relation

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1).$$

P.4/ En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Première partie

Soit $\Delta(\varphi)$ l'ensemble des nombres réels α pour lesquels la fonction φ_α est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

1.1/ Déterminer l'ensemble $\Delta(\varphi)$.

1.2/ Montrer que φ_α est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $\alpha \in \Delta(\varphi)$.

1.3/ On suppose que $\alpha \in \Delta(\varphi)$.

Soit $u_n(x) = x^{\alpha-1}\,e^{-nx}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$.

1.3.1/ Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,+\infty[$ et expliciter sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

1.3.2/ Montrer que la fonction u_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1.3.3/ Exprimer $\int_{[0,+\infty[} u_n(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de n, α et de la fonction Γ.

1.3.4/ Justifier avec soin l'égalité :

$$\int_{[0,+\infty[} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{[0,+\infty[} u_n(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

1.3.5/ En déduire l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide de α et des fonctions Γ et ζ.

1.3.6/ Quelle est la limite de $\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$?

1.3.7/ En déduire un équivalent de $I(k)$ pour $k \in \mathbf{N}$ et k tendant vers $+\infty$.

Deuxième partie

Rappel. La fonction h est définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$h(x,t) = \frac{\sin(x\,t)}{e^x - 1} \text{ lorsque } x \neq 0 \text{ et } h(0,t) = t.$$

II A

2.a.1/ Étudier la continuité sur $\mathbf{R}^2$ de la fonction h.

2.a.2/ Montrer que la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$.

2.a.3/ Montrer que la fonction H est continue sur $\mathbf{R}$.

2.a.4/ Montrer que la fonction H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa dérivée n^{e} sous forme intégrale.

II B

Soit g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g_n(x) = e^{-nx}\sin(\alpha\,x)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et α réel. On désigne par $D(g)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la série $\sum g_n(x)$ soit convergente, et pour $x \in D(g)$, on note

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x).$$

2.b.1/ Déterminer l'ensemble $D(g)$ lorsque $\alpha = 0$ (resp. lorsque $\alpha \neq 0$).

2.b.2/ Expliciter $g(x)$ pour $x \in D(g)$.

2.b.3/ Montrer que la fonction g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$.

2.b.4/ Justifier avec soin l'égalité

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_{[0,+\infty[} g_n(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

2.b.5/ Calculer $\int_{[0,+\infty[} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et en déduire la valeur de $H(\alpha)$ sous la forme de la somme d'une série.

On admet que pour $\alpha \in \mathbf{R}^*$,

$$H(\alpha) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{ch}(\alpha\pi)}{\mathrm{sh}(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\,\alpha}.$$

Troisième partie

On désigne par t un nombre réel et par ψ_t la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\psi_t(x) = \frac{\mathrm{sh}(t\,x)}{e^x - 1} \text{ lorsque } x \neq 0 \text{ et } \psi_t(0) = 0.$$

3.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}(\psi)$ des nombres réels t tels que la fonction ψ_t soit intégrable sur $[0, +\infty[$.

3.2/ On suppose que $t \in \mathcal{I}(\psi)$.

3.2.1/ Montrer la convergence de la série entière

$$\sum (-1)^k\,\zeta(2\,k+2)\,t^{2k+1}.$$

3.2.2/ Justifier avec soin l'égalité

$$H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,\zeta(2\,k+2)\,t^{2k+1}.$$

3.3/ Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum (-1)^k\,\zeta(2\,k+2)\,t^{2k+1}\,?$$

3.4/ On pose $a_{2k+1} = (-1)^k\,\dfrac{\zeta(2\,k+2)}{\pi^{2k+2}}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

3.4.1/ Montrer que, pour tout x dans un intervalle à préciser, on a l'égalité suivante :

$$(\mathrm{sh}\,x)\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}\,x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(2\,k+1)!}\,x^{2k}.$$

3.4.2/ En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{a_{2p+1}}{(2\,(k-p)+1)!}$$

puis en déduire que chaque a_{2k+1} est un nombre rationnel.

3.4.3/ Calculer a_5 et $\zeta(6)$.