

Sixième devoir de révision

[E3A09]

Durée 4 h

L'usage de calculatrice est interdit.

- La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, **l'énoncé exact des théorèmes de cours utilisés** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Ce problème a pour but d'étudier les crochets de Lie sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1, 2 ou 3.

Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise certains résultats de la partie I.

- E étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, une application B de $E \times E$ dans E est dite antisymétrique si et seulement si

$$(\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2) (B(\vec{u}, \vec{v}) = -B(\vec{v}, \vec{u})).$$

On appelle crochet de Lie sur E noté $[\cdot, \cdot]$ toute application telle que :

- $[\cdot, \cdot] : E \times E \rightarrow E$,
- $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire,
- $[\cdot, \cdot]$ est antisymétrique,
- $(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3)$

$$([\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]] + [\vec{v}, [\vec{w}, \vec{u}]] + [\vec{w}, [\vec{u}, \vec{v}]] = \vec{0}).$$

- Dans ce problème l'ensemble des vecteurs de la géométrie plane est identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des vecteurs de la géométrie dans l'espace à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Si E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, la notation de la géométrie vectorielle pour les éléments de E sera adoptée : ils seront notés avec une flèche.

- Dans les parties I et III, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire usuel de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le produit vectoriel de ces deux vecteurs sera noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

On rappelle la formule :

$$(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3)$$

$$(\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}.$$

$b_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne la base orthonormale directe canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ représente l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n , $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques.
- Si b est une base de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{m}_b(\vec{u})$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^3$ formé par les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base b et $\mathbf{m}_b(f)$ la matrice de f dans la base b .

Si $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, φ_A désignera l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base b_0 est A .

Questions de cours

- 1) Montrer que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. En particulier, si $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, donner l'unique décomposition de C en $C = S_C + A_C$ où $S_C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A_C \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

- 2) Si $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(S) \leq 2$, montrer qu'il existe une base b de $\mathbb{R}^3$ orthonormée **directe** telle que

$$\mathbf{m}_b(\varphi_S) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Application : on considère $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dé-

terminer une base b et les valeurs de β et γ . Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice S^n (distinguer n pair et n impair).

Partie I : exemples de crochets de Lie et premières propriétés

1) Exemples de crochets de Lie.

- a) On considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quelconque, montrer que

$$[\cdot, \cdot] \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{0} \end{array} \right.$$

est un crochet de Lie sur E .

- b) Montrer que

$$[\cdot, \cdot] \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (A, B) & \longmapsto & AB - BA \end{array} \right.$$

est un crochet de Lie sur $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce un crochet de Lie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$? (Justifier la réponse.)

2) Crochet de Lie usuel sur $\mathbb{R}^3$.

- a) Montrer que

$$(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3)$$

$$(\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}).$$

En déduire que

$$[\cdot, \cdot] \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array} \right.$$

est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

- b) On considère $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ et

$$\psi_{\vec{a}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{a} \wedge \vec{u} \end{array} \right.$$

- i) Montrer que $\psi_{\vec{a}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- ii) Déterminer le noyau et le rang de $\psi_{\vec{a}}$.
- iii) Dans la suite de cette question, on pose $\vec{a} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Donner la matrice $A_{\vec{a}}$ de $\psi_{\vec{a}}$ dans la base b_0 et vérifier que $A_{\vec{a}} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- iv) Calculer le polynôme caractéristique de $A_{\vec{a}}$.
- v) $\psi_{\vec{a}}$ est-il diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?
- vi) On considère une matrice antisymétrique quelconque de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A = A_{\vec{a}}$.

Partie II : détermination des crochets de Lie en dimension 1 et 2

- 1) On considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quelconque muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$.
 - a) Montrer que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille liée de E alors $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$.
 - b) La réciproque est-elle vraie ?

2) Détermination des crochets de Lie en dimension 1.

On considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1.

- a) Si E est muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$, montrer que

$$(\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2) ([\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}).$$

- b) Quels sont tous les crochets de Lie sur E ?

3) Détermination des crochets de Lie en dimension 2.

On considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $B = (\vec{u}_0, \vec{v}_0)$. Le déterminant de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de E dans la base B sera noté $\det_B(\vec{u}, \vec{v})$.

- a) On suppose dans cette question que E est muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ quelconque. Si $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$ avec $\vec{x} = x_1 \vec{u}_0 + x_2 \vec{v}_0$ et $\vec{y} = y_1 \vec{u}_0 + y_2 \vec{v}_0$ où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, montrer que $[\vec{x}, \vec{y}] = \det_B(\vec{x}, \vec{y}) \vec{k}_0$ où $\vec{k}_0 = [\vec{u}_0, \vec{v}_0]$.
- b) Dans cette question, on considère $\vec{k}$ un vecteur quelconque de E et on pose, si $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $[\vec{x}, \vec{y}] = \det_B(\vec{x}, \vec{y}) \vec{k}$. Le but de cette question est de montrer que c'est un crochet de Lie sur E .

- i) Montrer que

$$\begin{aligned} &(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3) \\ &(\det_B(\vec{u}, \vec{v}) \vec{w} + \det_B(\vec{v}, \vec{w}) \vec{u} \\ &+ \det_B(\vec{w}, \vec{u}) \vec{v} = \vec{0}). \end{aligned}$$

- ii) Montrer que

$$\begin{aligned} &(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3) \\ &([\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]] = [\det_B(\vec{v}, \vec{w}) \vec{u}, \vec{k}]). \end{aligned}$$

- iii) En déduire que $[\cdot, \cdot]$ est un crochet de Lie sur E .

- c) Quels sont les crochets de Lie sur E ?

Partie III : étude des crochets de Lie en dimension 3.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes. On rappelle que $b_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne la base orthonormale directe canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Expression des crochets de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

Dans toute la question 1), $[\cdot, \cdot]$ représente un crochet de Lie quelconque sur $\mathbb{R}^3$. On pose alors

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 = [\vec{j}, \vec{k}] &= \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = [\vec{k}, \vec{i}] = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}, \\ \vec{c}_3 = [\vec{i}, \vec{j}] &= \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

- a) Le but de cette question est de montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$[\vec{x}, \vec{y}] = f(\vec{x} \wedge \vec{y}).$$

- i) Montrer que si

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}] &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{c}_1 \\ &+ (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{c}_2 \\ &+ (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{c}_3. \end{aligned}$$

- ii) En déduire que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $[\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_C(\vec{x} \wedge \vec{y})$.

- iii) Montrer que φ_C est l'unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $[\vec{x}, \vec{y}] = f(\vec{x} \wedge \vec{y})$.

- b) D'après la question de cours 1) il existe un unique $S_C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A_C \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ tels que $C = S_C + A_C$.

- i) D'après (Partie I)2)b)vi), il existe un unique $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A_C = A_{\vec{a}}$ c'est-à-dire $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 : \varphi_{A_C}(\vec{u}) = \vec{a} \wedge \vec{u}$. Montrer

$$\text{que } 2\vec{a} = \begin{pmatrix} c_{32} - c_{23} \\ c_{13} - c_{31} \\ c_{21} - c_{12} \end{pmatrix}.$$

- ii) Montrer que $2\vec{a} = \vec{i} \wedge \vec{c}_1 + \vec{j} \wedge \vec{c}_2 + \vec{k} \wedge \vec{c}_3$.

- iii) Montrer que $[\vec{i}, \vec{c}_1] + [\vec{j}, \vec{c}_2] + [\vec{k}, \vec{c}_3] = \vec{0}$.

- iv) En déduire que $\varphi_C(2\vec{a}) = \vec{0}$ et que $\vec{a} \in \text{Ker}(\varphi_{S_C})$.

c) Dédurre des questions précédentes que

$$\begin{aligned} (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2) \\ ([\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} \\ - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y}). \end{aligned}$$

2) Réciproque.

Dans cette question, on considère $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\vec{a} \in \text{Ker}(\varphi_S)$ **quelconques**.

On définit $[\cdot, \cdot]$ par

$$\begin{aligned} (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2) \\ ([\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_S(\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{x} \\ - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{y}) \end{aligned}$$

et l'on veut montrer que $[\cdot, \cdot]$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$ (dit crochet de Lie associé à S).

- a) Montrer que $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire antisymétrique.
b) On suppose dans cette question $\vec{a} \neq \vec{0}$, on pose $\rho = \|\vec{a}\|$. Dans la question de cours 2) a été établie l'existence d'une base b de $\mathbb{R}^3$ orthonormale directe telle que

$$\mathbf{m}_b(\varphi_S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- i) Montrer que le premier vecteur de b peut être choisi égal à $\frac{1}{\rho} \vec{a}$.

Dans la suite de cette question, le premier vecteur de b est $\frac{1}{\rho} \vec{a}$.

- ii) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ avec

$$\mathbf{m}_b(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{m}_b(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

montrer que

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{d} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}$$

où $\mathbf{m}_b(\vec{d}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix}$ et $\mathbf{m}_b(\vec{e}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix}$.

- iii) Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathbf{m}_b(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{x}, \vec{d}]$ et $[\vec{x}, \vec{e}]$.

- iv) En déduire que si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ avec $\mathbf{m}_b(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{m}_b(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et

$$\mathbf{m}_b(\vec{z}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] = x_1 ((y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{d}' + (y_1 z_3 - y_3 z_1) \vec{e}')$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathbf{m}_b(\vec{d}') &= \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^2 - \beta \gamma \\ -2\rho \gamma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{m}_b(\vec{e}') &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2\rho \beta \\ \rho^2 - \beta \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- v) Montrer que $[\cdot, \cdot]$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

- vi) Application : en utilisant la question de cours 2), donner l'expression d'un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$ associé à $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- c) On suppose dans cette question $\vec{a} = \vec{0}$. montrer par un raisonnement similaire à III)2)b) que $[\cdot, \cdot]$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.