

Septième devoir de révision

La formule du triple produit de Jacobi

[MP13]

Durée : trois heures

L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si a_n , $n \geq 1$ est une suite numérique, on note $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ la limite (si elle existe) de la suite $A_n = \prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$.

L'expression $i = 1, m$ signifie « pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq m$ ».

Soit $\zeta \in \mathbf{C}$, on rappelle que si $\Re \zeta > 0$ alors $\text{Arg}(\zeta) = \text{Arctan}(\Im \zeta / \Re \zeta)$.

Dans tout ce problème, z notera un nombre complexe non nul et x un nombre réel tel que $|x| < 1$.

1 Préambule

Question 1 Soient $(\xi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$, démontrer par récurrence que

$$(1) \quad \left| \prod_{k=1}^n (1 + \xi_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |\xi_k|) - 1.$$

2 La formule de Jacobi

On pose

$$(2) \quad Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{2k}) \text{ et } H(x, z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^2 x^{2k-1}).$$

Question 2 Montrer que $Q(x)$ est bien défini, c'est-à-dire que la suite de terme général $\prod_{k=1}^n (1 - x^{2k})$ converge.

Question 3 Soit $\rho_k = |1 + z^2 x^{2k-1}|$, montrer que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} \rho_k$ converge. On pourra utilement penser à l'utilisation du logarithme pour transformer le produit infini en série.

Question 4 Soit $\theta_k = \text{Arg}(1 + z^2 x^{2k-1})$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$ converge.

Question 5 En déduire que H est bien défini.

Question 6 À l'aide de l'inégalité (1) démontrer que $Q(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$.

On pose

$$(3) \quad F(x, z) = H(x, z) H(x, z^{-1}).$$

Question 7 Montrer que

$$F(x, z) = (1 + z^{-2} x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^2 x^{2k+1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^{-2} x^{2k-1})$$

et en déduire que $x z^2 F(x, z) = F(x, z)$.

On admettra que $F(x, z)$ se décompose de façon unique sous la forme suivante :

$$F(x, z) = F_1(x, z) + F_2(x, z^{-1}),$$

où pour x fixé, $F_1(x, \xi)$ et $F_2(x, \xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini, soit

$$F_1(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \xi^k \text{ et } F_2(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(x) \xi^k;$$

les fonctions a_k , $k = 0, +\infty$ et a_{-k} , $k = 1, +\infty$ de la variable réelle x étant à valeurs dans $\mathbf{C}$. On notera

$$(4) \quad F(x, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(x) z^k, \quad z \in \mathbf{C}^*.$$

Question 8 On pose $F_1^n(x, z) = \sum_{k=0}^n a_k(x) z^k$. Démontrer que $a_0(x) = F_1(x, 0)$ et que pour $n \geq 0$,

$$a_{n+1}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F_1(x, z) - F_1^n(x, z)}{z^{n+1}}.$$

Question 9 En déduire que si $F(x, z)$ vérifie à la fois (4) et $F(x, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(x) z^k$, alors $\forall k \in \mathbf{Z}$ les fonctions a_k et d_k sont égales, c'est à dire que les coefficients $a_k(x)$ dans l'expression (4) de $F(x, z)$ sont déterminés de façon unique.

Question 10 Montrer qu'il existe des fonctions b_m , $m \in \mathbf{Z}$, de la variable réelle x , à valeurs dans $\mathbf{C}$, telles que

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \quad F(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x) z^{2m}.$$

Question 11 À l'aide de la question 7, montrer que $\forall m \in \mathbf{Z}$, $b_m(x) = b_{m-1}(x) x^{2m-1}$.

Question 12 Montrer que $\forall m \in \mathbf{N}$, $b_m(x) = b_{-m}(x)$ et donner l'expression de $b_m(x)$ en fonction de $b_0(x)$ et x .

Question 13 À l'aide de l'inégalité (1), démontrer que $H(x, z) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$.

Question 14 En déduire que $b_0(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$.

On pose

$$(5) \quad P(x, z) = Q(x) F(x, z) \text{ et } \eta = e^{i\pi/4}.$$

Question 15 Montrer que

$$P(x, \eta) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{4k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{4k-2}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{4k-2}).$$

Question 16 En déduire que $P(x, \eta) = P(x^4, i)$.

On pose $c_m(x) = Q(x) b_m(x)$.

Question 17 À l'aide de la question 16 et de l'expression de $b_m(x)$ de la question 12, montrer que $c_0(x^4) = c_0(x)$.

Question 18 En utilisant une récurrence et à l'aide des questions 14 et 6, en déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $c_0(x) = 1$ et la formule du triple produit

$$(6) \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^2 x^{2k-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^{-2} x^{2k-1}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{m^2} z^{2m}.$$

3 Le nombre de partitions d'un entier

Question 19 En posant $x = t^{3/2}$ et par un choix judicieux de z^2 , déduire la formule des nombres pentagonaux d'Euler :

$$(7) \quad \prod_{m=1}^{\infty} (1 - t^m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m t^{(3m^2+m)/2},$$

$t \in \mathbf{R}, 0 \leq t < 1,$

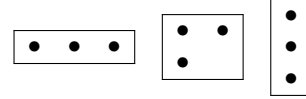
de celle du triple produit (6).

Si n est un entier positif, on note $p(n)$ et on appelle nombre de partitions de n le nombre de façons de représenter n comme une somme d'entiers positifs sans prendre en considération l'ordre des termes ; c'est

encore le nombre de solutions $(r_1, \dots, r_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de l'équation

$$(8) \quad \sum_{j=1}^n r_j = n, \quad \text{telles que } r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq 1.$$

On aura par exemple $p(3) = 3$ car $3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, partitions que l'on représente sous la forme des trois diagrammes de Ferrer suivants :



On note S_1 l'ensemble des solutions de (8). On note également S_2 l'ensemble des solutions $(q_1, \dots, q_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n j q_j = n.$$

On note f l'application $(\mathbf{N}^*)^n \rightarrow (\mathbf{N}^*)^n$ définie par $f(q_1, \dots, q_n) = (r_1, \dots, r_n)$ où $r_j = \sum_{i=j}^n q_i$.

Question 20 En s'aidant de l'application f , démontrer que S_1 et S_2 comportent le même nombre d'éléments.

Question 21 Démontrer que pour $n > 0$, $p(n)$ est le coefficient de t^n dans le développement de $\prod_{k=1}^n (\sum_{i=0}^n t^{ik})$.

Question 22 À l'aide de la formule d'Euler (7), démontrer que

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p(k) t^k\right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right) = 1.$$

Question 23 En déduire la valeur de $p(n)$, $n = 1, 7$.