Corrigé du septième devoir de révision

1. *Initialisation.* Pour $n=1$, l'inégalité demandée s'écrit $|\xi_1| \leqslant |\xi_1|$, et c'est clairement vrai.

Transmission. Soit $n \geqslant 1$ tel que l'on ait

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)-1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|)-1.$$

En utilisant cette hypothèse de récurrence et l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+\xi_k)-1\right| &= \left|(1+\xi_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)-1\right|\\ &= \left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)-1+\xi_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)\right|\\ &\leqslant \left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)-1\right| + |\xi_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)\right|\\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|)-1+|\xi_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|)\\ &= (1+|\xi_{n+1}|)\prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|)-1\\ &= \prod_{k=1}^{n+1}(1+|\xi_k|)-1,\end{aligned}$$

et l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k)-1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|)-1. \tag{1}$$

2. Posons $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})$. Comme $|x|<1$, la suite (P_n) est à termes strictement positifs et $P_{n+1}/P_n = 1-x^{2n+2} < 1$. Ainsi, (P_n) décroit strictement ; comme elle est minorée, elle converge et

$\boxed{Q(x) \text{ est bien défini.}}$

3. Posons $P_n = \prod_{k=1}^{n}\rho_k$.

Si l'un des ρ_k est nul, la suite (P_n) est nulle à partir d'un certain rang, donc elle converge.

Sinon, la suite (P_n) est à termes strictement positifs et l'on peut considérer

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\rho_k.$$

Puisque $|x|<1$, quand $k\to+\infty$, $\rho_k \to 1$ et

$$\ln\rho_k \sim \rho_k - 1$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\rho_k - 1 \leqslant 1+|z^2|\,|x|^{2k-1}-1 = |z^2|\,|x|^{2k-1}.$$

D'après la seconde inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\rho_k - 1 &\geqslant \left|1-|z^2|\,|x|^{2k-1}\right|-1\\ &= 1-|z^2|\,|x|^{2k-1}-1 = -|z^2|\,|x|^{2k-1},\end{aligned}$$

pour k suffisamment grand car $|z^2|\,|x|^{2k-1}\to 0$. Ainsi,

$$|\rho_k - 1| \leqslant |z^2|\,|x|^{2k-1}.$$

Or $\sum |z^2|\,|x|^{2k-1}$ converge comme série géométrique de raison $x^2\in[0,1[$, donc $\sum(\rho_k-1)$ converge absolument, donc $\sum\ln\rho_k$ converge absolument, donc $(\ln P_n)$ converge et par continuité de l'exponentielle, (P_n) converge. Cela signifie que $\boxed{\prod_{k=1}^{+\infty}\rho_k \text{ converge.}}$

4. Notons $z = r\,e^{i\theta}$, avec $r>0$ car $z\neq 0$. Alors

$$1+z^2\,x^{2k-1} = 1+r^2\cos(2\theta)\,x^{2k-1}+r^2\sin(2\theta)\,x^{2k-1}.$$

Or $1+r^2\cos(2\theta)\,x^{2k-1}\to 0$ donc à partir d'un certain rang, $1+r^2\cos(2\theta)\,x^{2k-1}>0$ et

$$\begin{aligned}\theta_k &= \operatorname{Arg}(1+z^2\,x^{2k-1})\\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{r^2\sin(2\theta)\,x^{2k-1}}{1+r^2\cos(2\theta)\,x^{2k-1}}\right).\end{aligned}$$

L'argument de l'arctangente tend vers 0 donc

$$\theta_k \sim \frac{r^2\sin(2\theta)\,x^{2k-1}}{1+r^2\cos(2\theta)\,x^{2k-1}} \sim r^2\sin(2\theta)\,x^{2k-1},$$

car le dénominateur tend vers 1. $\sum r^2\sin(2\,\theta)\,x^{2k-1}$ converge absolument comme série géométrique de raison x^2, donc

$\boxed{\sum\theta_k \text{ converge absolument donc converge.}}$

5. Avec les notations précédentes,

$$1+z^2\,x^{2k-1} = \rho_k\,e^{i\theta_k},$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n}(1+z^2\,x^{2k-1}) = \left(\prod_{k=1}^{n}\rho_k\right)e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k}$$

D'après les questions précédentes, les suites $\left(\prod_{k=1}^{n}\rho_k\right)$ et $\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)$ convergent, donc la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+z^2\,x^{2k-1})\right)$ converge et

$\boxed{H \text{ est bien définie.}}$

6. D'après l'inégalité (1) appliquée aux $\xi_k = -x^{2k}$,

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})-1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+x^{2k})-1.$$

De plus, pour tout $u\geqslant 0$,

$$1+u \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{u^p}{p!} = e^u.$$

Donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(1+x^{2k}) &\leqslant \prod_{k=1}^{n}e^{x^{2k}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}x^{2k}\right)\\ &\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{2k}\right) = \exp\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})-1\right| \leqslant \exp\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)-1$$

et en passant à la limite sur n,

$$|Q(x)-1| \leqslant \exp\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)-1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

7. Puisque la seconde variable de F doit être non nulle, supposons que $x \neq 0$, et toujours $|x| < 1$. On a

$$F(x, x\,z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^2\,x^{2k+1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-3}).$$

En changeant k en $k+1$ dans le second produit,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-3}) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1})$$
$$= (1 + z^{-2}\,x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1}),$$

en séparant le premier terme. Cette manipulation parait licite, mais comme il s'agit d'un produit infini, vérifions qu'elle est permise. On a clairement

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + z^{-2}\,x^{2k-3}) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1})$$
$$= (1 + z^{-2}\,x^{-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1}).$$

Comme à la question 5, $\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + z^{-2}\,x^{2k-3})\right)$ et $\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1})\right)$ convergent et l'on peut passer à la limite pour obtenir ce que l'on pensait. Ainsi, l'on a bien

$$\boxed{F(x, x\,z) = (1 + z^{-2}\,x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^2\,x^{2k+1}) \times \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1}).}$$

Constatons que

$$1 + z^{-2}\,x^{-1} = \frac{1 + z^2\,x}{z^2\,x}.$$

Alors, avec des procédés déjà rencontrés et justifiés,

$$x\,z^2\,F(x, x\,z) = (1 + z^2\,x) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^2\,x^{2k+1}) \times \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1})$$
$$= \prod_{k=0}^{\infty}(1+z^2\,x^{2k+1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}\,x^{2k-1})$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2\,x^{2k-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}\,x^{2k-1})$$
$$= F(x, z).$$

8. Ici, x est fixé, et ξ est la variable.

$a_0(x)$ est le terme constant de la série entière $F_1(x, \xi)$, donc c'est $F_1(x, 0)$:

$$\boxed{a_0(x) = F_1(x, 0).}$$

Soient $n \geqslant 0$ et $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\frac{F_1(x, z) - F_1^n(x, z)}{z^{n+1}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(x)\,z^{k-n-1}$$
$$= a_{n+1}(x) + \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k(x)\,z^{k-n-1}$$
$$= a_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+1+k}(x)\,z^k.$$

On sait que la somme d'une série entière est continue sur son disque de convergence. En particulier

$$\lim_{z\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+1+k}(x)\,z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+1+k}(x)\,0^k = 0.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a_{n+1}(x) = \lim_{z\to 0} \frac{F_1(x, z) - F_1^n(x, z)}{z^{n+1}}.}$$

9. Supposons que pour tous $|x| < 1$ et $z \in \mathbb{C}^*$,

$$F(x, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(x)\,z^k,$$

où F vérifie (4). Posons

$$G_1(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)\,z^k \text{ et } G_2(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k}(x)\,z^k.$$

Alors $F(x, z) = G_1(x, z) + G_2(x, z^{-1})$ et, pour x fixé, $G_1(x, \xi)$ et $G_2(x, \xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini. D'après l'unicité *admise* par l'énoncé,

$$F_1 = G_1 \text{ et } F_2 = G_2.$$

Soit donc x fixé dans $]-1, 1[$. Montrons par récurrence forte que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(x) = d_k(x).$$

Initialisation. Comme à la question 8,

$$a_0(x) = F_1(x, 0) = G_1(x, 0) = d_0(x),$$

et l'initialisation est acquise.

Transmission. Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $k \leqslant n$, $a_k(x) = d_k(x)$. Il s'ensuit que $F_1^n = G_1^n$, avec des notations évidentes. Toujours avec la question 8,

$$a_{n+1}(x) = \lim_{z\to 0} \frac{F_1(x, z) - F_1^n(x, z)}{z^{n+1}}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{G_1(x, z) - G_1^n(x, z)}{z^{n+1}} = d_{n+1}(x)$$

et le résultat est encore vrai au rang $n+1$.

Conclusion. Par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_k(x) = d_k(x)$.

Le travail est le même avec F_2 et G_2 et permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{-k}(x) = d_{-k}(x)$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } k \in \mathbb{Z},\ a_k(x) = d_k(x).}$$

10. Comme $(-z)^2 = z^2$, $F(x, z) = F(x, -z)$, donc

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x)\,z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\,a_k(x)\,z^k.$$

D'après la question précédente, on en tire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a_k = (-1)^k a_k$. Donc pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $a_{2m+1} = 0$. Finalement, en notant $b_m = a_{2m}$,

$$\boxed{\forall |x| < 1, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x)\,z^{2m}.}$$

11. D'après la question 7, pour tout $x \neq 0$,

$$F(x,z) = x\,z^2\,F(x, x\,z),$$

et avec la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x,z) &= x\,z^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x)\,(x\,z)^{2m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x)\,x^{2m+1}\,z^{2m+2} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{m-1}(x)\,x^{2m-1}\,z^{2m} \end{aligned}$$

D'après la question 9, on en tire que

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ b_m(x) = b_{m-1}(x)\,x^{2m-1}.$$

12. On voit que $F(x,z) = F(x, z^{-1})$ par définition de F, donc

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x)\,z^{2m} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x)\,z^{-2m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{-m}(x)\,z^{2m}. \end{aligned}$$

Avec la question 9, on a immédiatement

$$\forall m \in \mathbb{N},\ b_m(x) = b_{-m}(x).$$

Avec la question 11,

$$b_1(x) = b_0(x)\,x,\ b_2(x) = b_1(x)\,x^3 = b_0(x)\,x^4,$$
$$b_3(x) = b_2(x)\,x^5 = b_0(x)\,x^9.$$

Par une récurrence immédiate et avec le début de la question, on en tire que

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ b_m(x) = b_0(x)\,x^{(m^2)}.$$

13. On procède exactement comme à la question 6, ce qui ne pose aucune difficulté.

14. On voit donc que

$$F(x,1) = H(x,1)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Or

$$\begin{aligned} F(x,1) &= b_0(x) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{(m^2)} \\ &= b_0(x) \left(1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} x^{(m^2)}\right). \end{aligned}$$

La somme est celle d'une série entière, laquelle est donc continue en 0 et tend vers sa valeur en 0, qui est nulle. Il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 0} b_0(x) = 1.$$

15. Faisons un calcul formel. Comme $\eta^2 = e^{i\pi/2} = i$,

$$\begin{aligned} &P(x,\eta) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + i\,x^{2k-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - i\,x^{2k-1}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + i\,x^{2k-1})(1 - i\,x^{2k-1}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - (i\,x^{2k-1})^2) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2(2k)}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2(2k-1)}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{4k-2}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{4k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{4k-2}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{4k-2}). \end{aligned}$$

La justification n'en pose pas de difficulté, en revenant aux produits finis et en passant à la limite, comme à la question 7.

16. En continuant sur le même principe,

$$\begin{aligned} &P(x,\eta) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{4k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{4k-2})(1 + x^{4k-2}) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{8k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{8k-4}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{8k-4}) \\ &= P(x^4, i). \end{aligned}$$

17. Avec les questions 10 et 12, sachant que $\eta^2 = i$,

$$\begin{aligned} P(x,\eta) &= Q(x)\,b_0(x) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{(m^2)}\,\eta^{2m} \\ &= c_0(x) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m\,x^{(m^2)} \\ &= c_0(x) \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} i^m\,x^{(m^2)} + \sum_{m=1}^{+\infty} i^{-m}\,x^{(m^2)}\right) \\ &= c_0(x) \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (i^m + i^{-m})\,x^{(m^2)}\right). \end{aligned}$$

Or, comme $i^{-1} = \bar{\imath}$,

$$i^m + i^{-m} = 2\,\mathrm{Re}(i^m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 2p-1, \\ 2\,(-1)^p & \text{si } m = 2p, \end{cases}$$

donc

$$P(x,\eta) = c_0(x) \left(1 + 2\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p\,x^{4p^2}\right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(x^4, i) &= Q(x^4)\,b_0(x^4) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{4m^2}\,i^{2m} \\ &= c_0(x^4) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m\,x^{4m^2} \\ &= c_0(x^4) \left(1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\,x^{4m^2}\right). \end{aligned}$$

Puisque $P(x,\eta) = P(x^4, i)$ et que les indices sont muets,

$$\begin{aligned} &c_0(x) \left(1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\,x^{4m^2}\right) \\ &= c_0(x^4) \left(1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\,x^{4m^2}\right). \end{aligned}$$

D'après l'expression de la question 15 et comme $|x| < 1$, on voit que $P(x, \eta) > 0$, donc les parenthèses sont non nulles. En simplifiant, il vient

$$\boxed{c_0(x) = c_0(x^4).}$$

18. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_0(x) = c_0(x^{(4^n)}).$$

Or $|x| < 1$, donc $\lim_n x^{(4^n)} = 0$. Mais $c_0 = Q\,b_0$ et l'on a vu que Q (question 6) et b_0 (question 14) tendent vers 1 en 0, donc c_0 aussi. Cela signifie que $\lim_n c_0(x^{(4^n)}) = 1$, donc $\boxed{c_0(x) = 1.}$

Avec les questions 10, 12, la définition de P et ce qui précède,

$$P(x,z) = Q(x)\,F(x,z) = c_0(x) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{(m^2)}\,z^{2m},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^2\,x^{2k-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z^{-2}\,x^{2k-1})\\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{(m^2)}\,z^{2m}.\end{aligned}}$$

19. Si $t = 0$, les deux membres de la formule (7) valent 1 et sont donc égaux.

Soit $t \in \,]0,1[$. Posons $x = t^{3/2}$ et considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -\sqrt{t}$. Comme $t \neq 0$, $z \neq 0$. De plus, seul z^2 intervient dans les formules, donc le choix explicite d'une racine z de $-\sqrt{t}$ n'importe pas. Alors, le triple produit devient

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{3k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{1/2}\,t^{3k-3/2}) \prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{-1/2}\,t^{3k-3/2})\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 - t^{3k}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - t^{3k-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1 - t^{3k-2})\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}(1 - t^m).\end{aligned}$$

Tout cela est possible en revenant aux produits finis, comme à la question 7.

En outre, la somme dans (6) devient

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} t^{3m^2/2}(-\sqrt{t})^m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m\,t^{(3m^2+m)/2}.$$

D'où l'on tire la formule (7) voulue.

20. Attention. Il y a une erreur dans l'énoncé : en effet, dans l'exemple proposé,

$$S_1 = \{(3,0,0), (2,1,0), (1,1,1)\},$$

donc on doit avoir $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{N}^3$ et pas $(\mathbb{N}^*)^3$. De même,

$$S_2 = \{(3,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}3 &= 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0\\ &= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0\\ &= 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1.\end{aligned}$$

Donc ici aussi, $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}^3$ et pas $(\mathbb{N}^*)^3$.

Considérons donc que S_1 et S_2 sont inclus dans $\mathbb{N}^n$, et que $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$.

Si l'on montre que f réalise une bijection de S_2 dans S_1, on pourra conclure que

$$\boxed{\operatorname{card}(S_1) = \operatorname{card}(S_2).}$$

Soit $(r_1, \dots, r_n) \in S_1$. Montrons par analyse-synthèse que cet élément de S_1 admet un unique antécédent par f dans S_2.

Analyse. Considérons un antécédent potentiel $(q_1, \dots, q_n) \in S_2$ de $(r_1, \dots, r_n)$ par f. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=j}^{n} q_i = r_j$. Donc d'une part, $r_n = q_n$, c'est-à-dire $q_n = r_n$; et d'autre part, pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, $r_j - r_{j+1} = q_j$, c'est-à-dire $q_j = r_j - r_{j+1}$. Ainsi, $(q_1, \dots, q_n)$ vérifie forcément

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ q_j = \begin{cases} r_j - r_{j+1} & \text{si } j \leqslant n-1,\\ r_n & \text{si } j = n.\end{cases}$$

Synthèse. Considérons les q_j ainsi définis. Comme les r_j sont rangés par ordre décroissant, les q_j sont bien des entiers positifs ou nuls. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j\,q_j &= n\,r_n + \sum_{j=1}^{n-1} j\,(r_j - r_{j+1})\\ &= n\,r_n + \sum_{j=1}^{n-1} j\,r_j - \sum_{j=1}^{n-1} j\,r_{j+1}\\ &= \sum_{j=1}^{n} j\,r_j - \sum_{j=2}^{n}(j-1)\,r_j\\ &= \sum_{j=1}^{n} j\,r_j - \sum_{j=1}^{n}(j-1)\,r_j\\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j = n.\end{aligned}$$

Donc $(q_1, \dots, q_n) \in S_2$.

Conclusion. Par analyse-synthèse, tout élément de S_1 admet un unique antécédent par f dans S_2. Donc f réalise une bijection de S_2 dans S_1, ce que l'on voulait.

21. Par définition, $p(n) = \operatorname{card}(S_1)$. D'après la question 20, $p(n) = \operatorname{card}(S_2)$.

On souhaite développer

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} t^{i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} t^{2i}\right)\cdots\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ni}\right).$$

Pour obtenir un terme en t^n, on prend un monôme dans chaque parenthèse, qui aura donc la forme $t^{k i_k}$, où k est l'indice de la parenthèse choisie, et i_k est l'indice de la somme dans cette parenthèse. Autrement dit, on obtient un terme de la forme

$$t^n = t^{1 i_1}\,t^{2 i_2}\cdots t^{n i_n} = t^{\sum_{k=1}^{n} k i_k}.$$

En passant, on doit avoir $\sum_{k=1}^{n} k\,i_k = n$, donc $(i_1, \dots, i_n) \in S_2$. Cela signifie qu'il y a autant de telles décompositions que d'éléments dans S_2.

$\boxed{\text{Donc le coefficient de } t^n \text{ cherché est } \operatorname{card}(S_2)\text{, c'est-à-dire } p(n).}$

22. Convention. Pour simplifier les écritures, convenons que $p(0) = 1$: en effet, il y a bien une seule façon d'écrire $0 = 0$ comme somme d'entiers positifs ou nuls. On se rappelle que contrairement à l'énoncé, on accepte les termes nuls dans la décomposition (voir la question 20).

Calcul formel. Pour commencer, voici une approche formelle. En généralisant le calcul de la question précédente, on peut affirmer que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p(k)t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{n} p(k)t^k + \cdots$$

où les termes non explicites sont des monômes en t de degré strictement supérieurs à n.

À partir de là, on aimerait pouvoir passer à la limite sur n et affirmer que

$$(*) \qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} t^{ik}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(k)\,t^k.$$

En effet, puisque les monômes non explicites précédents sont de degrés strictement supérieurs à n, quand n est parti à l'infini, il n'y en a plus.

Grâce à la question 19, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} p(k)\,t^k &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} t^{ik}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^k} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k)} = \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}},\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} p(k)\,t^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\,t^{(3m^2+m)/2}\right) = 1.}$$

Justification. Comme à la question 19, soit $t \in [0,1[$. Plus précisément que plus haut, on peut dire que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) = \sum_{k=0}^{n} p(k)\,t^k + \sum_{k=n+1}^{n^2} q_{n,k}\,t^k$$

en explicitant les monômes suscités : on a simplement nommé leurs coefficients.

Un encadrement. Comme $t \geqslant 0$, tous les termes manipulés sont positifs donc $q_{n,k} \geqslant 0$. De plus, pour $k \in [\![n+1, n^2]\!]$, il n'y a pas assez de termes dans le membre de gauche de (a) pour reconstituer entièrement $p(k)\,t^k$, donc $q_{n,k} \leqslant p(k)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{n} p(k)\,t^k \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n^2} p(k)\,t^k.$$

Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} p(k)\,t^k \text{ et } P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right).$$

On vient de montrer que

$$S_n \leqslant P_n \leqslant S_{n^2}$$

et donc aussi

$$P_n \leqslant S_{n^2} \leqslant P_{n^2}.$$

Une limite. Prouvons comme on le pense que

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} t^{ik}\right).$$

Tout d'abord, comme $t \in [0,1[$, $t^k \in [0,1[$ et donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} t^{ik} = \frac{1}{1-t^k}.$$

D'après la question 19, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k)$ converge, donc le produit infini ci-dessus converge et

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} t^{ik}\right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k)}.$$

Alors, prouver la limite annoncée revient à prouver que

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right)\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k) = 1.$$

Pour cela, évaluons

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right)\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k) - 1\right|.$$

On a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1-t^{k(n+1)}}{1-t^k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-t^{k(n+1)})}{\prod_{k=1}^{n}(1-t^k)}.\end{aligned}$$

En outre,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k) = \prod_{k=1}^{n}(1-t^k)\prod_{k=n+1}^{\infty}(1-t^k).$$

Comme à la question 7, cette séparation ne pose pas de problème car le nouveau produit converge. Donc

$$\begin{aligned}&\left|\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right)\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k) - 1\right| \\ &= \left|\prod_{k=1}^{n}(1-t^{k(n+1)})\prod_{k=n+1}^{\infty}(1-t^k) - 1\right| \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+t^{k(n+1)})\prod_{k=n+1}^{\infty}(1+t^k) - 1.\end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité (1). Là encore, ça ne pose pas de problème car les produits considérés convergent. Majorons comme à la question 6 :

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{n}(1+t^{k(n+1)})\prod_{k=n+1}^{\infty}(1+t^k) - 1 \\ &\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k(n+1)}\right)\exp\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k\right) - 1 \\ &\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{k(n+1)}\right)\exp\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}} + \frac{t^{n+1}}{1-t}\right) - 1.\end{aligned}$$

Comme $t \in [0,1[$, cette différence tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui valide la limite voulue.

Conclusion. Posons

$$P = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} t^{ik}\right).$$

Avec les notations du début de la question, on vient donc de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P.$$

Alors, la suite (P_{n^2}) converge aussi vers P, car elle est extraite de (P_n). Donc d'après le théorème d'encadrement, puisque $P_n \leqslant S_{n^2} \leqslant P_{n^2}$, la suite (S_{n^2}) converge, vers P. Or la suite (S_n) croît, car les S_n sont les sommes partielles d'une série à termes positifs. Donc elle converge dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Comme sa suite extraite (S_{n^2}) converge, elle-même converge, vers P aussi. Finalement, la série $\sum p(k)\,t^k$ converge et a pour somme P, ce qui est l'égalité $(*)$ souhaitée, et cela valide le calcul formel.

Commentaire. OUF ! Je ne sais pas faire plus court...

23. Il reste à développer par un produit de Cauchy. Il faudrait vérifier que c'est possible, car la seconde somme possède des indices négatifs. À ce stade, je ne le ferai pas. De toute façon, le théorème invoqué est lui-même admis.

Alors dans les sommes, seuls nous intéressent les $k \leqslant 7$ et les $|m| \leqslant 2$ de sorte que $(3m^2+m)/2 \leqslant 7$. On développe, en se limitant aux termes de degrés inférieurs ou égaux à 7 :

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{7} p(k)\,t^k\right)\left(\sum_{m=-2}^{2} (-1)^m\,t^{(3m^2+m)/2}\right)\\
&= \big(p(0)+p(1)\,t+p(2)\,t^2+p(3)\,t^3+p(4)\,t^4\\
&\quad +p(5)\,t^5+p(6)\,t^6+p(7)\,t^7\big)\,(t^5-t+1-t^2+t^7)\\
&= p(0)+(p(1)-p(0))\,t+(p(2)-p(1)-p(0))\,t^2\\
&\quad +(p(3)-p(2)-p(1))\,t^3+(p(4)-p(3)-p(2))\,t^4\\
&\quad +(p(5)-p(4)-p(3)+p(0))\,t^5\\
&\quad +(p(6)-p(5)-p(4)+p(1))\,t^6\\
&\quad +(p(7)-p(6)-p(5)+p(2)+p(0))\,t^7+\cdots
\end{aligned}$$

En égalant à 1, on retrouve que $p(0)=1$, et tous les autres coefficients sont nuls. La résolution est immédiate, d'où le tableau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(k)$	1	1	2	3	5	7	11	15