

Huitième devoir de révision

Exponentielle de matrices

[CS13]

Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes.

Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul.

Si \mathbb{K} désigne un corps, \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on adopte les notations suivantes.

— $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

— $\mathbb{K}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré au plus p .

— $M_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans \mathbb{K} .

— I_p est la matrice identité de $M_p(\mathbb{K})$.

— Une matrice $A \in M_p(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^\top = -A$.

— $GL_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$.

— On note tr l'application trace et \det l'application déterminant.

— $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans \mathbb{R} d'ordre p .

— $SO_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $O_p(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

— On munit $M_p(\mathbb{K})$ de la norme quadratique $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in M_p(\mathbb{K}),$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\text{tr}(\overline{A}^\top A)}$$

et on munit $M_p(\mathbb{K})$ de la structure d'espace vectoriel normé associé.

— Si $A \in M_p(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de \mathbb{K}^p canoniquement associé à la matrice A et, par abus de notation, $\ker(A) = \ker(u_A)$.

— Si $A \in M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe,

$$E(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_p + \frac{1}{n} A \right)^n.$$

— Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit \mathbb{R}^p de sa structure euclidienne canonique d'espace euclidien.

I Question préliminaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n .

I.B – En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

II Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3

II.A – Matrices antisymétriques d'ordre 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

II.A.1) Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{1}{n} A \right) \in SO_2(\mathbb{R}).$$

II.A.2) Déterminer un nombre réel θ_n tel que

$$\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{1}{n} A \right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

II.A.3) En déduire que $E(A)$ existe et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

II.B – Matrices antisymétriques d'ordre 3

II.B.1) Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a) Montrer que $\det(B) = 0$.

b) Montrer que $(\ker(u_B))^\perp$ est stable par u_B .

c) En déduire que B est de rang 0 ou 2.

II.B.2) Montrer qu'il existe une matrice P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel β tels que

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

II.B.3) Montrer que lorsque l'égalité de la question précédente est vérifiée, on a $|\beta| = \frac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

II.B.4) Montrer que $E(B)$ existe et est une matrice de rotation. Préciser la valeur de son angle non orienté en fonction de $\|B\|_2$.

III Exponentielle de matrices diagonalisables

III.A – Cas de matrices diagonales

Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

III.A.1) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.

III.A.2) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.

III.A.3) Soit $(\Delta, +)$ le sous-groupe additif de $M_p(\mathbb{K})$ formé par les matrices diagonales. Montrer que E définit un morphisme de groupes de $(\Delta, +)$ dans $(GL_p(\mathbb{K}), \times)$.

III.B – Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

III.B.1) Montrer que $E(A)$ existe.

III.B.2) Montrer que $\det(E(A)) = e^{\text{tr}(A)}$.

III.B.3) Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

III.C – Exponentielle de la somme

Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

III.C.1) Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

On étudiera les restrictions de u_B aux sous-espaces propres de u_A .

III.C.2) En déduire que $E(A + B)$ existe et que

$$E(A + B) = E(A)E(B) = E(B)E(A).$$

IV Exponentielle de matrices nilpotentes

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'ordre k). Soit également $B \in M_p(\mathbb{C})$.

IV.A –

IV.A.1) Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k$, $\ker(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\ker(A^j)$.

IV.A.2) En déduire que $k \leq p$.

IV.B – Montrer que $E(A)$ existe.

IV.C – Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$.

IV.D – On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe. On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^{n-i}.$$

Montrer que $E(A + B)$ existe et que

$$E(A + B) = E(A)E(B).$$

IV.E – Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.

IV.F – Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

V Cas général

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n} \right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

et χ_A le polynôme caractéristique de A défini par $\chi_A(X) = \det(XI_p - A)$.

V.A – Liens avec le polynôme caractéristique

V.A.1) Montrer qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $P_n = Q_n \chi_A + R_n$.

V.A.2) Montrer que $E(A)$ existe si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(A)$ existe.

V.A.3) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines de χ_A deux à deux distinctes, dont on note n_1, \dots, n_k les ordres de multiplicité respectifs.

Pour tout entier q compris entre 1 et p , on note J_q la matrice de $M_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout entier q compris entre 1 et p , la famille $\{(xI_q + J_q)^i, 0 \leq i \leq q - 1\}$ est libre.

V.A.4) Soit $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})$ la matrice diagonale par blocs définie par

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\chi_B = \chi_A$.

V.B. – Convergence de $E(A)$

V.B.1) Soit $i \geq 1$ un entier. Montrer que

$$B^i = \text{diag}((\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1})^i, \dots, (\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})^i).$$

V.B.2) Soit P un polynôme annulateur non nul de la matrice B .

a) Montrer que le degré de P est $\geq p$.

b) En déduire que la famille $\{B^i, 0 \leq i \leq p - 1\}$ est libre.

V.B.3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(B)$ existe.

V.B.4) En déduire que $E(A)$ existe.

••• FIN •••