# Corrigé du huitième devoir de révision

Notations. Dans tout le corrigé, $p$, $n$ et $k$ désignent des entiers naturels non nuls.

En suivant l'énoncé, notons

$$\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_p)=\mathrm{diag}(a_j,1\leqslant j\leqslant p)$$

la matrice diagonale de $M_p(\mathbb{K})$ formée des coefficients $a_1,\ldots,a_p$. De même, notons

$$\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_k)=\mathrm{diag}(A_j,1\leqslant j\leqslant k)$$

la matrice diagonale par blocs de $M_p(\mathbb{K})$ formée des blocs diagonaux $A_1,\ldots,A_k$, tous carrés mais pas forcément de même taille.

Rappels. On sait que les calculs sur les matrices diagonales se mènent sur les coefficients diagonaux. De même, les calculs sur les matrices diagonales par blocs se mènent sur les blocs diagonaux, même s'ils ne sont pas tous de même tailles, mais à condition qu'ils soient tous carrés.

On considère des suites de matrices. Puisque $M_p(\mathbb{K})$ est de dimension finie, il est équivalent de considérer les suites des coordonnées dans une base donnée, donc les suites des coefficients, qui correspondent aux coordonnées dans la base canonique de $M_p(\mathbb{K})$. C'est ce que l'on fera.

**I.A.** Notons $z_n=1+\dfrac{z}{n}=1+\dfrac{a}{n}+i\,\dfrac{b}{n}$.

Si $z_n=0$, $|z_n^n|=0$ et $\arg(z_n^n)$ n'est pas défini.

Si $z_n\neq 0$, il existe un unique $(\rho_n,\theta_n)\in\mathbb{R}_+^*\times\,]-\pi,\pi]$ tel que $z_n=\rho_n\,e^{i\theta_n}$. Bien-sûr,

$$\begin{aligned}\rho_n&=\sqrt{\Big(1+\frac{a}{n}\Big)^2+\Big(\frac{b}{n}\Big)^2}\\&=\Big(1+\frac{2\,a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Si $1+\frac{a}{n}>0$,

$$\theta_n=\mathrm{Arctan}\bigg(\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}\bigg)=\mathrm{Arctan}\Big(\frac{b}{n+a}\Big).$$

Si $1+\frac{a}{n}=0$, $b\neq 0$ car $z_n\neq 0$ et $\theta_n=\mathrm{sgn}(b)\,\dfrac{\pi}{2}$.

Si $1+\frac{a}{n}<0$,

$$\theta_n=\mathrm{Arctan}\Big(\frac{b}{n+a}\Big)+\begin{cases}\pi & \text{si } b\geqslant 0,\\ -\pi & \text{si } b<0.\end{cases}$$

Finalement, $z_n^n=\rho_n^n\,e^{in\theta_n}$,

$$|z_n^n|=\rho_n^n=\Big(1+\frac{2\,a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)^{n/2}$$

et $\arg(z_n^n)=n\,\theta_n$. Mais son expression explicite est lourde. Cependant, dans l'optique de la question suivante, quand $n>|z|$, comme $|a|\leqslant|z|$, $-|z|\leqslant a\leqslant|z|$ et

$$1+\frac{a}{n}\geqslant 1-\frac{|z|}{n}>0.$$

Donc dès que $n>|z|$,

$$\arg(z_n^n)=n\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{b}{n+a}\Big).$$

**I.B.** Comme $n$ tend vers $\infty$, $\dfrac{b}{n+a}\to 0$. De plus, $\mathrm{Arctan}\,u\sim_{u\to 0}u$. Dès que $n>|z|$,

$$\arg(z_n^n)\sim n\,\frac{b}{n+a}\to b.$$

Par ailleurs, en faisant un développement limité à l'ordre 2,

$$\begin{aligned}|z_n^n|&=\exp\Big(\frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{2\,a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\Big)\Big)\\&=\exp\Big(\frac{n}{2}\Big(\frac{2\,a}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)\\&=\exp\Big(a+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\to e^a\end{aligned}$$

par continuité de l'exponentielle en $a$. Ainsi,

$$z_n^n\to e^a\,e^{ib}=e^{a+ib}=e^z$$

par produit de limites et continuité de la fonction $y\mapsto e^{iy}$ en $b$.

**II.A.1.** Posons $A_n=I_2+\dfrac{1}{n}A$. On a

$$A_n^\top A_n=\begin{pmatrix}1&\frac{\alpha}{n}\\-\frac{\alpha}{n}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{\alpha}{n}\\\frac{\alpha}{n}&1\end{pmatrix}=\Big(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\Big)\,I_2.$$

En posant

$$\beta_n=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}},$$

de sorte que $A_n^\top A_n=\beta_n^2\,I_2$, on voit que

$$\Big(\frac{1}{\beta_n}\,A_n\Big)^\top\Big(\frac{1}{\beta_n}\,A_n\Big)=I_2$$

et $\dfrac{1}{\beta_n}\,A_n\in O_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det\Big(\frac{1}{\beta_n}\,A_n\Big)=\frac{1}{\beta_n^2}\,\det(A_n)=\frac{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}=1$$

et $\dfrac{1}{\beta_n}\,A_n\in SO_2(\mathbb{R})$.

**II.A.2.** Toute matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Donc $\theta_n$ existe. Comme la première colonne de $\dfrac{1}{\beta_n}\,A_n$ est $\dfrac{1}{\beta_n}\begin{pmatrix}1\\\frac{\alpha}{n}\end{pmatrix}$ et qu'on veut l'écrire $\begin{pmatrix}\cos(\theta_n)\\\sin(\theta_n)\end{pmatrix}$, on peut choisir $\theta_n=\arg\Big(1+i\,\dfrac{\alpha}{n}\Big)$. Ici, la partie réelle de ce nombre complexe est strictement positive, donc on peut choisir

$$\theta_n=\mathrm{Arctan}\Big(\frac{\alpha}{n}\Big).$$

**II.A.3.** Alors
$$\Big(I_2+\frac{1}{n}A\Big)^n=\beta_n^n\begin{pmatrix}\cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n)\\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n)\end{pmatrix}^n$$
$$=\beta_n^n\begin{pmatrix}\cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n)\\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n)\end{pmatrix}.$$
D'une part,
$$\beta_n^n=\Big(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\Big)^{n/2}=\exp\Big(\frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\Big)\Big)$$
$$=\exp\Big(\frac{n}{2}\Big(\frac{\alpha^2}{n^2}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)$$
$$=\exp\Big(\frac{\alpha^2}{2n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\to 1.$$
D'autre part, $n\theta_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\dfrac{\alpha}{n}=\alpha$.

Alors, $E(A)$ existe et vaut
$$E(A)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$
C'est la matrice de la rotation d'angle $\alpha$.

**II.B.1.a.** Comme $B^\top=-B$,
$$\det(B^\top)=\det(-B)=(-1)^3\det(B)=-\det(B).$$
Or $\det(B^\top)=\det(B)$ donc $\det(B)=-\det(B)$ et

$\det(B)=0$.

**II.B.1.b.** Traitons cette question matriciellement. Soient $x\in\ker(u_B)^\perp$ et $y\in\ker(u_B)$, et $X$ et $Y$ leurs matrices colonnes associées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On veut montrer que $u_B(x)\in\ker(u_B)^\perp$, donc que $(u_B(x)\,|\,y)=0$. La matrice associée à $u_B(x)$ est $BX$. Alors
$$(u_B(x)\,|\,y)=(BX)^\top Y=X^\top B^\top Y=-X^\top BY=0$$
car $BY=0$ puisque $u_B(y)=0$. Ainsi, $u_B(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $\ker(u_B)$ donc $u_B(x)\in\ker(u_B)^\perp$. Cela signifie que

$\ker(u_B)^\perp$ est stable par $u_B$.

**II.B.1.c.** Comme $\det(B)=0$, $\mathrm{rg}(B)<3$ donc $\mathrm{rg}(B)\in[\![0,2]\!]$.

Par l'absurde, supposons que $\mathrm{rg}(B)=1$. Alors d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u_B))=2$ d'où $\dim(\ker(u_B)^\perp)=1$. Soit $x\in\ker(u_B)^\perp\setminus\{0\}$, qui existe puisque $\ker(u_B)^\perp$ est une droite. Comme elle est stable par $u_B$, $u_B(x)$ est colinéaire à $x$ : il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u_B(x)=\lambda x$. En reprenant les notations matricielles de la question précédente, $BX=\lambda X$ donc $X^\top BX=\lambda X^\top X$. Par ailleurs,
$$X^\top BX=(B^\top X)^\top X=-(BX)^\top X=-\lambda X^\top X.$$
Alors, $\lambda X^\top X=-\lambda X^\top X$. Mais $X\neq 0$ donc $X^\top X>0$. Alors $\lambda=0$. Donc $u_B(x)=0$ et $x\in\ker(u_B)$. Et comme $\ker(u_B)\cap\ker(u_B)^\perp=\{0\}$, $x=0$. Cela contredit l'hypothèse que $x\neq 0$. Alors $\mathrm{rg}(B)\neq 1$.

Finalement, $\mathrm{rg}(B)\in\{0,2\}$.

**II.B.2.** Si $B=0$, c'est évident, avec $\beta=0$.

Sinon, on sait que $\mathbb{R}^p=\ker(u_B)\oplus\ker(u_B)^\perp$. Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux, il existe une base orthonormée $(e_1,e_2,e_3)$ adaptée à cette somme directe. Alors, la matrice de passage $P$ de la base canonique à cette nouvelle base est orthogonale, car elle envoie une base orthonormée sur une base orthonormée. De plus, comme $\ker(u_B)$ et $\ker(u_B)^\perp$ sont stables par $u_B$, dans cette base adaptée à la somme directe, la matrice de $u_B$ est diagonale par blocs, sous la forme
$$C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a&c\\0&b&d\end{pmatrix}.$$
On a donc $B=PCP^{-1}=PCP^\top$. Or d'une part $B^\top=(PCP^\top)^\top=PC^\top P^\top$, et d'autre part, $B^\top=-B$, donc $C^\top=-C$. Alors, $a=d=0$ et $c=-b$.

Finalement, il existe bien $P\in O_3(\mathbb{R})$ et $\beta\in\mathbb{R}$ comme souhaités.

**II.B.3.** On a $\|B\|_2^2=\mathrm{tr}(B^\top B)=-\mathrm{tr}(B^2)$. Or, en notant
$$C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\beta\\0&\beta&0\end{pmatrix},$$
$B=P\,C\,P^{-1}$, donc $B^2=P\,C^2\,P^{-1}$ et $\mathrm{tr}(B^2)=\mathrm{tr}(C^2)$. Comme
$$C^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\beta^2&0\\0&0&-\beta^2\end{pmatrix},$$
$\|B\|_2^2=2\beta^2$ et $|\beta|=\dfrac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

**II.B.4.** Notons $A=\begin{pmatrix}0&-\beta\\ \beta&0\end{pmatrix}$, de sorte que l'on écrive abusivement par blocs
$$C=\begin{pmatrix}0&0\\0&A\end{pmatrix}.$$
Alors, en calculant par blocs,
$$\Big(I_3+\frac{1}{n}B\Big)^n=P\Big(I_3+\frac{1}{n}C\Big)^nP^{-1}$$
$$=P\begin{pmatrix}1&0\\0&I_2+\frac{1}{n}A\end{pmatrix}^nP^{-1}$$
$$=P\begin{pmatrix}1&0\\0&(I_2+\frac{1}{n}A)^n\end{pmatrix}P^{-1}.$$
D'après II.A.3, $\lim_{n\to\infty}(I_2+\frac{1}{n}A)^n$ existe et vaut
$$E(A)=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\ \sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}.$$

Alors, $E(B)$ existe et vaut

$$\begin{aligned} E(B) &= P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & E(A)\end{pmatrix}P^{-1}\\ &= P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

C'est donc la matrice d'une rotation d'angle non orienté $\beta$, ou aussi $|\beta|$, c'est-à-dire $\dfrac{\|B\|_2}{\sqrt{2}}$.

**III.A.1.** Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les coefficients diagonaux de $D$, pas forcément distincts, de sorte que $D = \mathrm{diag}(\lambda_j, 1 \leqslant j \leqslant p)$. On a

$$\Big(I_p + \frac{1}{n}D\Big)^n = \mathrm{diag}\Big(\Big(1+\frac{\lambda_j}{n}\Big)^n, 1 \leqslant j \leqslant p\Big).$$

D'après I.B, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{\lambda_j}{n}\Big)^n = e^{\lambda_j}.$$

Alors, la suite $\Big((I_p + \frac{1}{n}D)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $\mathrm{diag}(e^{\lambda_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)$. Ainsi,

$E(D)$ existe et vaut $\mathrm{diag}(e^{\lambda_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)$.

De plus,

$$\det(E(D)) = \prod_{j=1}^{p} e^{\lambda_j} = e^{\sum_{j=1}^p \lambda_j} = e^{\mathrm{tr}(D)} \neq 0,$$

car l'exponentielle d'un nombre n'est jamais nulle.

Donc $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.

**III.A.2.** Comme on cherche un polynôme tel que $Q(D) = E(D)$ et que $E(D)$ est inversible, $Q(D)$ l'est et $Q \neq 0$. Soit alors $Q = \sum_{i=0}^q a_i X^i$ un polynôme de degré $q \geqslant 0$. On a $Q(D) = \mathrm{diag}(Q(\lambda_j), 1 \leqslant j \leqslant p)$. Dire que $Q(D) = E(D)$ signifie donc que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $Q(\lambda_j) = e^{\lambda_j}$. Pour éviter les redondances, considérons les valeurs distinctes des $\lambda_j$ et notons-les $\mu_1, \dots, \mu_k$, où $k \in [\![1,p]\!]$. Alors, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $Q(\mu_j) = e^{\mu_j}$. Autrement dit, on veut résoudre le système

$$\begin{cases} a_0 + \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_1^q a_q = e^{\mu_1}\\ \cdots\\ a_0 + \mu_k a_1 + \cdots + \mu_k^q a_q = e^{\mu_k}\end{cases}$$

dont les inconnues sont les $a_j$. Puisqu'on cherche $Q$, pour se simplifier la tâche, considérons que $q = k-1$, de sorte que le système devienne carré :

$$\begin{cases} a_0 + \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_1^{k-1} a_{k-1} = e^{\mu_1}\\ \cdots\\ a_0 + \mu_k a_1 + \cdots + \mu_k^{k-1} a_{k-1} = e^{\mu_k}\end{cases}$$

Et l'on reconnait que son déterminant principal est le Vandermonde des $\mu_j$,

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \cdots & \mu_1^{k-1}\\ \cdots & & & \\ 1 & \mu_k & \cdots & \mu_k^{k-1}\end{vmatrix},$$

lequel est non nul car les $\mu_j$ sont distincts deux à deux. Alors, ce système admet une solution unique.

Ainsi, il existe bien un polynôme $Q$ tel que $Q(D) = E(D)$.

**III.A.3.** Soient deux matrices diagonales

$$A = \mathrm{diag}(a_j, 1 \leqslant j \leqslant p) \text{ et } B = \mathrm{diag}(b_j, 1 \leqslant j \leqslant p).$$

Alors $A + B = \mathrm{diag}(a_j + b_j, 1 \leqslant j \leqslant p)$ et d'après III.A.1,

$$\begin{aligned} E(A+B) &= \mathrm{diag}(e^{a_j+b_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)\\ &= \mathrm{diag}(e^{a_j}\, e^{b_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)\\ &= \mathrm{diag}(e^{a_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)\,\mathrm{diag}(e^{b_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)\\ &= E(A)\,E(B).\end{aligned}$$

Ainsi, $E$ définit bien un morphisme de groupe de $(\Delta, +)$ dans $(GL_p(\mathbb{K}), \times)$.

*Commentaire.* Puisque $A + B = B + A$, en passant $E(A)\,E(B) = E(B)\,E(A)$.

**III.B.1.** Comme $A$ est diagonalisable, il existe une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \Big(I_p + \frac{1}{n}A\Big)^n &= \Big(P\,I_p\,P^{-1} + \frac{1}{n}P\,D\,P^{-1}\Big)^n\\ &= \Big(P\Big(I_p + \frac{1}{n}D\Big)P^{-1}\Big)^n\\ &= P\Big(I_p + \frac{1}{n}D\Big)^n P^{-1}.\end{aligned}$$

D'une part, $(I_p + \frac{1}{n}D)^n \to E(D)$, d'après III.A. D'autre part, comme les limites se font coefficients par coefficients, par opérations usuelles sur les limites des suites numériques,

$$P\Big(I_p + \frac{1}{n}D\Big)^n P^{-1} \to P\,E(D)\,P^{-1}.$$

Alors, $E(A)$ existe et $E(A) = P\,E(D)\,P^{-1}$.

**III.B.2.** Comme $A$ et $D$ sont semblables et que $E(A)$ et $E(D)$ le sont aussi, d'après III.A.1 on a

$$\det(E(A)) = \det(E(D)) = e^{\mathrm{tr}(D)} = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

**III.B.3.** Soit $x \in \mathbb{K}$ : $x\,I_p + A = P\,(x\,I_p + D)\,P^{-1}$ où $xI_p + D$ est diagonale, donc d'après III.B.1, $E(xI_p + A)$ existe et vaut $P\,E(x\,I_p + D)\,P^{-1}$. D'après III.A.3, comme $x\,I_p$ et $D$ sont diagonales,

$$E(x\,I_p + D) = E(x\,I_p)\,E(D).$$

D'après III.A.1, puisque $x\,I_p = \mathrm{diag}(x, 1 \leqslant j \leqslant p)$, $E(x\,I_p) = \mathrm{diag}(e^x, 1 \leqslant j \leqslant p) = e^x\,I_p$. Ainsi, $E(x\,I_p + D) = e^x\,E(D)$ et

$$\begin{aligned} E(x\,I_p + A) &= P\,(e^x\,E(D))\,P^{-1}\\ &= e^x\,P\,E(D)\,P^{-1} = e^x\,E(A).\end{aligned}$$

**III.C.1.** Comme $A$ et $B$ commutent, les sous-espaces propres de $u_A$ sont stables par $u_B$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_A)$. Comme $u_B$ est diagonalisable, l'endomorphisme $v_{B,\lambda}$ induit par $u_B$ sur $E_\lambda(u_A)$ est aussi diagonalisable. En effet, $u_B$ étant diagonalisable, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, lequel est aussi annulateur de $v_{B,\lambda}$, qui se trouve donc diagonalisable. Alors, il existe une base $\mathscr{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u_A)$ constituée de vecteurs propres pour $v_{B,\lambda}$, donc pour $u_B$. Mais ses vecteurs sont dans $E_\lambda(u_A)$ donc sont aussi propres pour $u_A$. Comme $u_A$ est diagonalisable,

$$\mathbb{K}^p = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u_A)} E_\lambda(u_A)$$

donc la réunion $\mathscr{B} = \cup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u_A)}\mathscr{B}_\lambda$ est une base de $\mathbb{K}^p$, adaptée à cette somme directe. Par construction, ses vecteurs sont à la fois propres pour $u_A$ et $u_B$. Alors, en nommant $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ à la base $\mathscr{B}$, $P^{-1}A\,P$ et $P^{-1}B\,P$ sont diagonales, car elles représentent $u_A$ et $u_B$ dans une base de vecteurs propres.

**III.C.2.** Notons $C = P^{-1}A\,P$ et $D = P^{-1}B\,P$ ces deux matrices diagonales. D'après III.B.1, $E(A) = P\,E(C)\,P^{-1}$ et $E(B) = P\,E(D)\,P^{-1}$. En outre, $A+B = P(C+D)P^{-1}$, donc d'après III.B.1, $E(A+B)$ existe et vaut $P E(C+D) P^{-1}$. Mais d'après III.A.3, $E(C+D) = E(C)\,E(D)$, donc

$$\begin{aligned}E(A+B) &= P\,E(C+D)\,P^{-1}\\ &= P\,E(C)\,E(D)\,P^{-1}\\ &= P\,E(C)\,P^{-1}P\,E(D)\,P^{-1}\\ &= E(A)\,E(B).\end{aligned}$$

Bien-sûr, comme $A+B = B+A$, on a aussi $E(A+B) = E(B)\,E(A)$.

**IV.A.1.** Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Pour tout $x \in \ker(A^{j-1})$, $u_A^{j-1}(x) = 0$ donc

$$u_A^j(x) = u_A(u_A^{j-1}(x)) = u_A(0) = 0$$

et $x \in \ker(A^j)$. Ainsi, $\ker(A^{j-1}) \subset \ker(A^j)$.

Comme $A^{k-1} \neq 0$, $\ker(A^{k-1}) \neq \mathbb{K}^p$ : alors il existe $e \in \mathbb{K}^p$ tel que $e \notin \ker(A^{k-1})$, c'est-à-dire $u_A^{k-1}(e) \neq 0$. Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Écrivons

$$0 = u_A^k(e) = u_A^j(u_A^{k-j}(e)).$$

Alors $u_A^{k-j}(e) \in \ker(A^j)$. Mais

$$u_A^{j-1}(u_A^{k-j}(e)) = u_A^{k-1}(e) \neq 0$$

donc $u_A^{k-j}(e) \notin \ker(u_A^{j-1})$. Où l'on voit que l'inclusion $\ker(A^{j-1}) \subset \ker(A^j)$ est stricte. Finalement,

pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $\ker(A^{j-1}) \subsetneq \ker(A^j)$.

**IV.A.2.** Alors, les dimensions de ces noyaux forment une suite strictement croissante d'entiers, tous inférieurs à $p$. La première dimension est nulle car $A^0 = I_p$ et $\ker(I_p) = \{0\}$. Alors, $\ker(A)$ est de dimension au moins 1, donc $\ker(A^2)$ est de dimension au moins 2, et par une récurrence immédiate, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $\ker(A^j)$ est de dimension au moins $j$. Alors $k \leqslant \dim(\ker(A^k)) \leqslant p.$

**IV.B.** Comme $n$ tend vers $\infty$, supposons $n \geqslant k$. Pour tout $j \geqslant k$, $A^j = 0$ donc en développant par la formule du binôme, qui est permise puisque $I_p$ et $A$ commutent, on a

$$\begin{aligned}\Big(I_p + \frac{1}{n}A\Big)^n &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\Big(\frac{1}{n}A\Big)^j\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\prod_{i=0}^{j-1}(n-i)}{j!}\,\frac{1}{n^j}\,A^j\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\prod_{i=0}^{j-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right)\frac{1}{j!}\,A^j\end{aligned}$$

où les produits valent 1 si $j = 0$, par convention. Cette somme comporte un nombre de termes indépendant de $n$. Dans chaque terme, le produit comporte un nombre de termes indépendant de $n$, chacun tendant vers 1. Alors, pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$ et tout $i \in [\![0,j-1]\!]$, $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{i}{n}) = 1$ et par produit de limites,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big) = 1.$$

Alors, par somme de limites,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(I_p + \frac{1}{n}A\Big)^n = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\,A^j.$$

Ainsi, $E(A)$ existe et $E(A) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\,A^j$.

**IV.C.** C'est évident ici, avec $Q(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\,X^j$.

**IV.D.** Là encore, supposons $n \geqslant k$. Comme $A$ et $B$ commutent, $A$ et $I_p + \frac{1}{n}B$ aussi, donc grâce au binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\Big(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\Big)^n &= \Big(\frac{1}{n}A + I_p + \frac{1}{n}B\Big)^n\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\Big(\frac{1}{n}A\Big)^j\Big(I_p+\frac{1}{n}B\Big)^{n-j}\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(\prod_{i=0}^{j-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right)\frac{1}{j!}\,A^j\Big(I_p+\frac{1}{n}B\Big)^{n-j}.\end{aligned}$$

Pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$, d'après l'énoncé

$$\lim_{n\to\infty}\Big(I_p+\frac{1}{n}B\Big)^{n-j} = \lim_{n\to\infty}\Big(I_p+\frac{1}{n}B\Big)^n = E(B).$$

Et comme plus haut, $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{j-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big) = 1$. Donc $E(A+B)$ existe et vaut

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\frac{1}{j!}\,A^j\,E(B)\Big) &= \left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}\,A^j\right)E(B)\\ &= E(A)\,E(B).\end{aligned}$$

**IV.E.** En remplaçant $B$ par $x\,I_p$, qui commute bien avec $A$ et dont l'exponentielle existe bien, et d'après un calcul précédent (voir III.B.3),

$$E(x\,I_p + A) = E(x\,I_p)\,E(A) = e^x\,E(A).$$

**IV.F.** On a

$$E(A) - I_p = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\,A^j = A\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\,A^{j-1}\right).$$

En nommant $B$ la parenthèse, c'est un polynôme en $A$, donc elle commute avec $A$. Alors

$$(E(A) - I_p)^k = A^k\,B^k = 0$$

et $E(A) - I_p$ est nilpotente.

**V.A.1.** Oui, il s'agit de la division euclidienne de $P_n$ par $\chi_A$.

**V.A.2.** En évaluant cette égalité en $A$, sachant que $\chi_A(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_n(A) = R_n(A)$. Comme par définition, $E(A)$ est la limite (si elle existe) de la suite $\Big(P_n(A)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$E(A)$ existe si et seulement si $\lim_{n\to\infty} R_n(A)$ existe, et alors, elle vaut cette limite.

**V.A.3.** Soit $q \in [\![1, p]\!]$. La matrice $J_q$ comporte des 1 sur la diagonale juste au-dessus de la diagonale principale, et des 0 partout ailleurs. Un rapide calcul montre que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $J_q^i$ comporte aussi des 1 sur une diagonale parallèle à la diagonale principale, mais décalée de $i+1$ crans vers la droite, et des 0 partout ailleurs. En particulier, $J_q^q = 0$ et $J_q$ est nilpotente d'ordre $q$.

Commençons par montrer que la famille $\{J_q^i, 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre. Considérons une combinaison linéaire nulle,

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i\,J_q^i = 0.$$

En multipliant par $J_q^{q-1}$, sachant que pour tout $i \geqslant q$, $J_q^i = 0$, on obtient $a_0\,J_q^{q-1} = 0$, donc $a_0 = 0$ car $J_q^{q-1} \neq 0$. Alors la somme commence à 1, et en multipliant par $J_q^{q-2}$, $a_1 = 0$. Par une récurrence évidente, les $a_i$ sont tous nuls et

la famille $\{J_q^i, 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre.

Considérons maintenant une combinaison linéaire nulle de la famille $\{(x\,I_q + J_q)^i, 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$,

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i (x\,I_q + J_q)^i = 0.$$

Soit le polynôme $P = \sum_{i=0}^{q-1} a_i\,X^i$, de sorte que

$$\sum_{i=0}^{q-1} a_i\,(x\,I_q + J_q)^i = P(x\,I_q + J_q).$$

C'est l'évaluation en $J_q$ du polynôme $P(x+X)$. Grâce à la formule de Taylor en $x$, on a

$$P(X + x) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{P^{(i)}(x)}{i!}\,X^i.$$

Alors

$$0 = P(J_q + x\,I_q) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{P^{(i)}(x)}{i!}\,J_q^i.$$

Comme la famille $\{J_q^i, 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre, il s'ensuit que pour tout $i \in [\![0, q-1]\!]$, $P^{(i)}(x) = 0$, donc que $x$ est racine de $P$ d'ordre au moins $q$. Mais $P$ est de degré au plus $q-1$, donc il est nul et tous les $a_i$ le sont. Cela signifie que

la famille $\{(x\,I_q + J_q)^i, 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre.

**V.A.4.** D'abord, avec les notations de l'énoncé,

$$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_j}.$$

En outre, $B = \operatorname{diag}(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j}, 1 \leqslant j \leqslant p)$ est diagonale par blocs et l'on sait que le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux, donc

$$\begin{aligned}\chi_B(X) &= \det(X\,I_p - B)\\ &= \det\Big(\operatorname{diag}(X\,I_{n_j} - (\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j}), 1 \leqslant j \leqslant p)\\ &= \prod_{j=1}^{k} \det((X - \lambda_j)\,I_{n_j} - J_{n_j}).\end{aligned}$$

Or les blocs $(X - \lambda_j)\,I_{n_j} - J_{n_j}$ sont triangulaires supérieurs, de taille $n_j$ et avec $n_j$ fois $X - \lambda_j$ sur la diagonale. Alors

$$\chi_B(X) = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_j} = \chi_A(X).$$

**V.B.1.** Clairement, en calculant par blocs,

$$\forall i \in \mathbb{N},\ B^i = \operatorname{diag}((\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j})^i, 1 \leqslant j \leqslant p).$$

**V.B.2.a.** Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i\,X^i$ un polynôme annulateur de $B$, de degré $d \geqslant 0$. En calculant par blocs,

$$P(B) = \operatorname{diag}(P(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j}), 1 \leqslant j \leqslant p).$$

Soit $j \in [\![1, k]\!]$. On a donc

$$P(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j}) = \sum_{i=0}^{d} a_i\,(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j})^i = 0.$$

Comme les $a_i$ ne sont pas tous nuls, car $P$ n'est pas nul, il s'agit d'un combinaison linéaire nulle non triviale de la famille $\{(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j})^i, 0 \leqslant i \leqslant d\}$, laquelle est donc liée. D'après V.A.3, la famille $\{(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j})^i, 0 \leqslant i \leqslant n_j - 1\}$ est libre, donc $d \geqslant n_j$.

De plus, $P(\lambda_j\,I_{n_j} + J_{n_j})$ est l'évaluation en $J_{n_j}$ du polynôme $P(\lambda_j + X)$. Comme en V.A.3, d'après la formule de Taylor en $\lambda_j$,

$$P(\lambda_j + X) = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(\lambda_j)}{i!}\,X^i,$$

donc, puisque $J_{n_j}$ est nilpotente d'ordre $n_j$ et que $d \geqslant n_j$,

$$0 = P(\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}) = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(\lambda_j)}{i!} J_{n_j}^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{P^{(i)}(\lambda_j)}{i!} J_{n_j}^i.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire nulle de la famille $\{J_{n_j}^i, 0 \leqslant i \leqslant n_j - 1\}$, qui est libre d'après V.A.3, donc pour tout $i \in [\![0, n_j - 1]\!]$, $P^{(i)}(\lambda_j) = 0$ et $\lambda_j$ est racine de $P$ d'ordre au moins $n_j$.

Ce travail est valable pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, donc le polynôme $P$ se factorise par le polynôme

$$\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_j},$$

lequel est de degré $n_1 + \cdots + n_k = p$.

Alors, $d \geqslant p$.

**V.B.2.b.** Dire qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de $B$ de degré inférieur strictement à $p$ signifie qu'il n'existe aucune combinaison linéaire nulle non triviale de la famille $\{B^i, 0 \leqslant i \leqslant p - 1\}$, donc qu'elle est libre.

**V.B.3.** Par blocs,

$$P_n(B) = \operatorname{diag}(P_n(\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j}), 1 \leqslant j \leqslant p).$$

Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, d'après IV.E, comme $J_{n_j}$ est nilpotente, $\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j})$ existe,

donc $\lim_{n\to\infty} P_n(B)$ existe.

**V.B.4.** D'après V.A.4, $\chi_A = \chi_B$, donc d'après V.A.1, $P_n = Q_n \chi_B + R_n$, et d'après V.A.2, $\lim_{n\to\infty} P_n(B)$ existe si et seulement si $\lim_{n\to\infty} R_n(B)$ existe. Ainsi, d'après V.B.3, $\lim_{n\to\infty} R_n(B)$ existe.

Comme $R_n \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$, écrivons

$$R_n = \sum_{i=0}^{p-1} r_{i,n} X^i.$$

Alors,

$$R_n(B) = \sum_{i=0}^{p-1} r_{i,n} B^i.$$

Comme la famille $\{B^i, 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$ est libre d'après V.B.2.b, cette écriture s'interprète comme la décomposition de $R_n(B)$ dans la base $\{B^i, 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$ de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(\{B^i, 0 \leqslant i \leqslant p-1\})$, lequel est de dimension finie $p$. Alors, d'après les rappels du tout début, la convergence de la suite $\Big(R_n(B)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à celles de chacune des suites de coordonnées : les suites $(r_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$. Alors, par opérations usuelles sur les limites, la suite de terme général

$$R_n(A) = \sum_{i=0}^{p-1} r_{i,n} A^i$$

converge, donc d'après V.A.2, $E(A)$ existe.