Premier devoir surveillé

Durée 4 h

Les calculatrices sont interdites.

Les questions étoilées sont réservées
aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.

Premier exercice
[CCINP19]

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3.$$

Solutions de (E) sur]0, 1[ou]1, +∞[

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la
fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

Q1. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I ,
puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .

Q2. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seule-
ment si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad xz'' + z' = 2x.$$

Q3. Montrer que si z est solution de (E₁) sur I , alors il
existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation
différentielle (E) sur I .

Solution particulière de l'équation homogène

Q5*. Déterminer l'ensemble des solutions développables
en série entière de l'équation différentielle homogène as-
sociée à (E) :

$$(H) \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

Deuxième exercice
[E3A17]

On s'intéresse à l'équation différentielle,

$$xy'' + y' - (x+1)y = 1,$$

que l'on souhaite résoudre sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $x \in I$, soit $r(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

a) Justifier que la fonction r admet une unique primi-
tive R s'annulant en 1, dont on donnera une expres-
sion intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Montrer que la fonction R est majorée sur l'inter-
valle $[1, +\infty[$.

En déduire qu'elle admet en $+\infty$ une limite, que
l'on nommera ℓ .

c) Montrer que la fonction R réalise une bijection
de I dans un intervalle que l'on précisera.

2. On note :

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^2(I, \mathbb{R}) / \right. \\ \left. \forall x > 0, xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \right\}.$$

a) Pour tout $y \in C^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$
pour tout $x > 0$.

Montrer que $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si z vérifie :

$$(*) \quad \forall x > 0, xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x}.$$

b) Déterminer les $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0.$$

On utilisera $r(2x)$.

c) Déterminer les $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = e^{-x}.$$

On utilisera $r(x)$.

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in C^2(I, \mathbb{R})$
vérifiant l'équation (*). On utilisera $R(x)$ et $R(2x)$.

e) Donner alors l'expression de la solution géné-
rale $y \in \mathcal{S}$.

3. a) En admettant qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que
 $R(x) = \ln x + \gamma + o(1)$ quand $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, déter-
miner les solutions $y \in \mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0.

b)* Valider l'hypothèse précédente.

c)* Prouver que $R(x) - \ln x - \gamma$ est développable en
série entière. On explicitera son développement en
série entière, ainsi que son rayon de convergence.

T.S.V.P.

Troisième exercice

Équations algébriques réciproques

[MP12]

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leq n$.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$u_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$$

donnée par la formule

$$u_n(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

est bien définie, et que c'est une symétrie.

Un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ est dit *réciroque de première espèce* s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit *réciroque de deuxième espèce* s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciroques de première (respectivement de deuxième) espèce.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathcal{P}$ (respectivement à $\mathcal{D}$).

3. Établir que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est réciroque (c'est-à-dire $R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$) et x est une racine de R , alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R . Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathcal{D}$ admet 1 pour racine, et que tout polynôme de $\mathcal{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.

4. Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciroques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciroques.

5. Vérifier que $P \in \mathcal{P}$ implique $(X-1)P \in \mathcal{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathcal{D}$, il existe un unique $P \in \mathcal{P}$ tel que $D = (X-1)P$.

6. Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathcal{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.

7. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

Quel est le degré de P ?

Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciroque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine.

8. Montrer que R est réciroque de première espèce et de degré pair. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait l'équivalence

$$R(x) = 0 \iff P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Y a-t-il unicité du polynôme P de $\deg(P)$?

Quatrième exercice

[CS13]

Soit n un entier naturel. On étudie l'équation différentielle d'inconnue y

$$(1) \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

On recherche des solutions dans l'ensemble $E = C^2(]0, +\infty[)$.

A – Résolution et propriété des solutions

A.1) Soit y une solution dans E de (1). On pose $z(x) = \sqrt{x}y(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Montrer que z est solution dans E d'une équation différentielle du type

$$(2) \quad z'' + qz = 0$$

avec $q \in E$.

Préciser l'expression de la fonction q et vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 1.$$

A.2) Justifier que si z est une solution non nulle de (2), alors pour $x > 0$, $(z(x), z'(x)) \neq (0, 0)$.

En déduire que si α est un zéro de z , alors il existe un réel strictement positif η tel que α soit le seul point d'annulation de z sur $I =]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$.

On dit dans ce cas que α est un *zéro isolé* de z .

B – Comportement asymptotique en $+\infty$

On étudie ici le comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une solution $z \in E$ de l'équation différentielle définie sur $]0, +\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$(3) \quad z'' + \left(1 + \frac{\lambda}{x^2}\right) z = 0.$$

Soit x_0 dans $]0, +\infty[$.

B.1) En considérant l'équation différentielle (3) sous la forme $z'' + z = g$ avec $g(x) = -\frac{\lambda}{x^2}z(x)$, la résoudre sur $]0, +\infty[$ par la méthode de variation de la constante.

En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad z(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \lambda \int_{x_0}^x z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2}.$$

B.2) On pose pour $x > 0$

$$h(x) = \int_{x_0}^x |z(u)| \frac{du}{u^2}.$$

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles μ et M telles que h vérifie l'inégalité différentielle pour $x \geq x_0$

$$h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x) \leq \frac{M}{x^2}.$$

Préciser les constantes μ et M en fonction de A, B et λ .

b) En déduire que h est bornée sur $[x_0, +\infty[$ puis que z est bornée sur ce même intervalle.

Multiplier par $e^{\mu/x}$ et intégrer l'inégalité de la question précédente.

B.3)* Justifier que

$$\int_x^{+\infty} z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.

En déduire l'existence de constantes α et β telles qu'au voisinage de $+\infty$,

$$z(x) = \alpha \cos(x - \beta) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$