Corrigé du premier devoir surveillé

Premier exercice

Q1. D'après l'énoncé, la fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Et puisque $0 \notin I$, la fonction $g : x \mapsto 1/x - 1$ l'est aussi. Comme produit de ces deux fonctions,

La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

En utilisant la formule de Leibniz, on a

$$\boxed{z' = gy' + g'y \text{ et } z'' = gy'' + 2g'y' + g''y.}$$

Q2. Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$z'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x)$$

$$z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y''(x) - \frac{2}{x^2}y'(x) + \frac{2}{x^3}y(x).$$

Pour éliminer les dénominateurs, calculons

$$\begin{aligned} x^2 z'(x) &= x(1-x)y'(x) - y(x) \\ x^3 z''(x) &= x^2(1-x)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x). \end{aligned}$$

Et en ajoutant,

$$\begin{aligned} x^3 z''(x) + x^2 z'(x) \\ = x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x). \end{aligned}$$

Où l'on voit que y est solution de (E) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 2x^3,$$

si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$x^3 z''(x) + x^2 z'(x) = 2x^3,$$

si et seulement si pour tout $x \in I$, en divisant par x^2 qui n'est pas nul,

$$xz''(x) + z'(x) = 2x,$$

si et seulement si z est solution de (E_1) sur I .

Q3. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre en z' : autrement dit, z' est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E_2) \quad xu' + u = 2x.$$

dont $x \mapsto x$ est une solution évidente, et dont l'équation différentielle homogène associée

$$(H_2) \quad xu' + u = 0$$

admet clairement $x \mapsto 1/x$ comme solution. Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_2) sur I est la droite affine $\{x \mapsto x + \lambda/x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, si z est solution de (E_1) sur I , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $z'(x) = x + \lambda/x$.

Q4. Ainsi, il existe aussi $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $z(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda \ln x + \mu$. Donc

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \lambda \ln x + \mu\right) \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x^3}{2(1-x)} + \lambda \frac{x \ln x}{1-x} + \mu \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

On obtient un ensemble de solutions de (E) sur I qui est un plan affine. D'après le cours, c'est exactement la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I , donc il n'y en a pas d'autres.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\left\{ x \mapsto \frac{\frac{1}{2}x^3 + \lambda x \ln x + \mu x}{1-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Commentaire. Les constantes λ et μ dépendent de l'intervalle I .

Q5*. Raisonnons par analyse-synthèse.

ANALYSE. Supposons qu'il existe une solution développable en série entière φ de (H) , de rayon de convergence $R > 0$. Écrivons, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après le cours, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on peut la dériver terme à terme autant de fois que l'on veut. En particulier, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Alors, en évaluant le premier membre de (H) , pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} &x^2(1-x)\varphi''(x) - x(1+x)\varphi'(x) + \varphi(x) \\ &= x^2\varphi''(x) - x^3\varphi''(x) - x\varphi'(x) - x^2\varphi'(x) + \varphi(x) \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &\quad - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n+1} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n \\ &\quad - \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n \\ &\quad - a_1 x + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} [n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} \\
&\quad - na_n - (n-1)a_{n-1} + a_n] x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n-1)^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}] x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n.
\end{aligned}$$

Alors φ est solution de (H) sur $] -R, R[$ si et seulement si pour tout $x \in] -R, R[$,

$$a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, les coefficients de cette série entière sont tous nuls : $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $(n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) = 0$, c'est-à-dire $a_n = a_{n-1}$ puisque $n-1 \neq 0$. Alors, tous les a_n sont égaux à a_1 , pour $n \geq 1$. Ainsi, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_1 x^n = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_1 x}{1-x}.$$

SYNTHÈSE. Le rayon de convergence du développement en série entière ci-dessus est 1 : il n'est pas nul, ce qui valide la synthèse.

Commentaire. Si $a_1 = 0$, le rayon de convergence est en fait $+\infty$.

Ainsi, l'ensemble des solutions développables en série entière de (H) est

$$\text{Vect} \left(x \mapsto \frac{x}{1-x} \right).$$

Deuxième exercice

1.a. D'après le théorème fondamental de l'intégration, comme $1 \in I$, la fonction r , qui est continue sur I , y admet une unique primitive R qui s'annule en 1. C'est la fonction $\left[R : x \mapsto \int_1^x r(t) dt \right.$

1.b. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $1/t \leq 1$ donc $r(t) \leq e^{-t}$, donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, par croissance de l'intégrale,

$$R(x) \leq \int_1^x e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1},$$

car $e^{-x} \geq 0$. Ainsi, $\left[R \right.$ est majorée sur $[1, +\infty[$.

De plus, comme primitive de r qui est continue, R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $R' = r \geq 0$, donc R croît sur I . Puisque R est croissante et majorée,

elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

1.c. Comme r est strictement positive sur I , R y est strictement croissante. Comme elle y est continue, elle réalise une bijection de I sur son image $R(I)$. On sait déjà que R tend vers ℓ en $+\infty$.

Étudions sa limite en 0. Considérons $x \in]0, 1[$. D'une part,

$$R(x) = - \int_x^1 r(t) dt.$$

D'autre part, pour tout $t \in [x, 1]$, $r(t) \geq e^{-x}/t$, donc

$$R(x) \leq - \int_x^1 \frac{e^{-x}}{t} dt = e^{-x} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Ainsi, R tend vers $-\infty$ en 0^+ . Finalement,

$\left[R \right.$ réalise une bijection de I sur $] -\infty, \ell[$.

2.a. Soit $y \in C^2(I, \mathbb{R})$. Pour tout $x > 0$, posons $z(x) = e^{-x} y(x)$, ou encore $y(x) = e^x z(x)$. Bien-sûr, z est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et pour tout $x > 0$,

$$y'(x) = e^x (z(x) + z'(x)),$$

$$y''(x) = e^x (z(x) + 2z'(x) + z''(x)).$$

Alors, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
&\left[x y''(x) + y'(x) - (x+1) y(x) = 1 \right. \\
&\iff x e^x (z(x) + 2z'(x) + z''(x)) \\
&\quad + e^x (z(x) + z'(x)) - (x+1) e^x z(x) = 1 \\
&\iff (\star) x z''(x) + (2x+1) z'(x) = e^{-x}.
\end{aligned}$$

2.b. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x+1$ sont continues sur I ; et la première ne s'y annule pas. Alors d'après le cours, l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 1 proposée, est une droite vectorielle, engendrée par la fonction

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \exp \left(- \int \frac{2x+1}{x} dx \right) \\
&= \exp(-2x - \ln x) = \frac{e^{-2x}}{x} = 2r(2x).
\end{aligned}$$

On a choisi une primitive arbitraire, puisque n'importe laquelle convient.

Les fonctions $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ cherchées sont les fonctions définies par $Z(x) = 2\alpha r(2x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Commentaire. Puisque α est arbitraire, 2α l'est aussi, et le premier 2 est inutile. Mais gardons-le pour la suite des calculs.

2.c. Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle. Plutôt que d'entamer une variation de la constante, voyons si r serait solution « évidente », en nous inspirant de l'énoncé. Pour tout $x > 0$,

$$r'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
&x r'(x) + (2x+1) r(x) \\
&= -e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x} + (2x+1) \frac{e^{-x}}{x} = e^{-x},
\end{aligned}$$

ce que l'on soupçonnait. D'après le cours, les fonctions cherchées sont sommes de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène précédente.

Les fonctions $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ cherchées sont les fonctions définies par $Z(x) = r(x) + 2\alpha r(2x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.d. Les solutions de $(\star)$ sont telles que z' est l'une des fonctions précédentes. Il suffit donc d'intégrer, en n'oubliant pas la constante d'intégration.

Les solutions $z \in C^2(I, \mathbb{R})$ de $(\star)$ sont les fonctions définies par $z(x) = R(x) + \alpha R(2x) + \beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Commentaire. Et c'est pour ça qu'on a gardé le 2 devant α avant.

2.e. Alors, puisque $y(x) = e^x z(x)$,

les solutions $y \in \mathcal{S}$ sont les fonctions définies par $y(x) = e^x R(x) + \alpha e^x R(2x) + \beta e^x$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Commentaire. Donc $\mathcal{S}$ est un plan affine, comme on s'y attendait d'après le cours.

3.a. Soit $y \in \mathcal{S}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, la limite de y en 0 est celle de z , où $y(x) = e^x z(x)$.

Comme l'énoncé le suggère, admettons que l'on puisse écrire $R(x) = \ln x + \gamma + o(1)$ pour $x > 0$ proche de 0. Alors,

$$\begin{aligned} z(x) &= \ln x + \gamma + o(1) + \alpha(\ln(2x) + \gamma + o(1)) + \beta \\ &= (1 + \alpha) \ln x + (1 + \alpha)\gamma + \alpha \ln 2 + \beta + o(1). \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq -1$, $1 + \alpha \neq 0$ et z tend $\pm\infty$ en 0^+ . Donc on doit choisir $\alpha = -1$. Et dans ce cas, toujours pour $x > 0$ proche de 0,

$$z(x) = \beta - \ln 2 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \beta - \ln 2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions $y \in \mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0^+ sont les fonctions définies par $y(x) = (R(x) - R(2x) + \beta)e^x$, où $\beta \in \mathbb{R}$.

3.b.* Soit $x \in]0, 1]$. On a

$$R(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

La fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})/t$ est continue sur $]0, 1]$ et elle admet une limite finie en 0^+ , car pour $t > 0$ proche de 0,

$$\frac{1 - e^{-t}}{t} = \frac{1 - (1 - t + o(t))}{t} = 1 + o(1).$$

Alors, cette fonction est intégrable sur $]0, 1]$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \gamma$$

existe et est finie.

Ainsi, il existe bien un réel $\gamma > 0$ tel que pour $x > 0$ proche de 0, $R(x) = \ln x + \gamma + o(1)$.

3.c.* En vertu des calculs précédents, et grâce en particulier à l'intégrabilité rencontrée, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} R(x) - \ln x - \gamma &= \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \\ &= \int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt. \end{aligned}$$

Par ailleurs, avec le développement en série entière de l'exponentielle, pour tout $t > 0$,

$$\frac{e^{-t} - 1}{t} = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n-1}}{n!}.$$

Et d'après la question précédente, l'on voit que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t} - 1}{t} = -1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0^{n-1}}{n!}.$$

Ainsi, la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-t} - 1}{t} & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

admet un développement en série entière de rayon de convergence $+\infty$. Alors, $R(x) - \ln x - \gamma$, qui en est l'unique primitive nulle en 0, admet aussi un développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, qui s'obtient en intégrant terme à terme le précédent :

$$\forall x > 0, R(x) - \ln x - \gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{nn!}.$$

Troisième exercice

1. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a clairement $u_n(P) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$, donc u_n est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, linéaire et involutive.

u_n est bien définie et c'est une symétrie.

2. Il s'ensuit que

$$\begin{cases} P \in \mathcal{P} \iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = a_{n-k}, \\ P \in \mathcal{D} \iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = -a_{n-k}. \end{cases}$$

3. Soit R un polynôme réciproque : il est non nul, donc il s'écrit $R = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ avec $a_r \neq 0$, en notant $r = \deg(R)$. S'il admet une racine x , il est non constant, donc $R(0) = a_0 = \pm a_r \neq 0$ et $x \neq 0$.

En outre, $R(\frac{1}{x}) = \pm \frac{1}{x^n} R(x) = 0$.

Si $R \in \mathcal{D}$, $R(X) = -X^r R(\frac{1}{X})$. En substituant 1 à X , on a $R(1) = -R(1)$ et $R(1) = 0$.

Si $R \in \mathcal{P}$, $R(X) = X^r R(\frac{1}{X})$. Si r est impair, en substituant -1 à X , on a $R(-1) = -R(-1)$ et $R(-1) = 0$.

4. Notons p, q et r les degrés de P, Q et R . Comme $P = QR$, on a $p = q + r$. Alors

$$\begin{aligned} u_p(P) &= X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = X^{q+r} Q\left(\frac{1}{X}\right) R\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = u_q(Q) u_r(R). \end{aligned}$$

Supposons P et Q réciproques : on a $u_p(P) = \varepsilon_P P$ et $u_q(Q) = \varepsilon_Q Q$, en notant $\varepsilon_P = \pm 1$ et $\varepsilon_Q = \pm 1$, selon l'espèce de P et Q . Alors

$$u_r(R) = \frac{\varepsilon_P P}{\varepsilon_Q Q} = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_Q} R.$$

Comme $\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_Q} = \pm 1$, R est réciproque.

Puisque Q et R jouent des rôles symétriques, si P et R sont réciproques, Q l'est aussi.

Enfin, si Q et R sont réciproques, en notant $u_q(Q) = \varepsilon_Q Q$ et $u_r(R) = \varepsilon_R R$ où $\varepsilon_Q = \pm 1$ et $\varepsilon_R = \pm 1$, on a $u_p(P) = \varepsilon_Q Q \varepsilon_R R = \varepsilon_Q \varepsilon_R P$ avec $\varepsilon_Q \varepsilon_R = \pm 1$ donc P est réciproque.

Dans les trois cas, on a $\varepsilon_P = \varepsilon_Q \varepsilon_R$, ou encore, puisque ces nombres (± 1) sont leur propre inverse, $\varepsilon_P \varepsilon_Q \varepsilon_R = 1$.

Si $P = QR$ et que deux d'entre eux sont réciproques, le troisième l'est aussi. En outre, $\varepsilon_P \varepsilon_Q \varepsilon_R = 1$: autrement dit, soit les trois sont dans $\mathcal{P}$, soit deux sont dans $\mathcal{D}$ et le troisième dans $\mathcal{P}$.

5. Constatons que $X - 1 \in \mathcal{D}$. D'après la question précédente, $\lfloor$ si $P \in \mathcal{P}$, $(X - 1)P \in \mathcal{D}$.

Réciproquement, si $D \in \mathcal{D}$, d'après la question 3 il admet 1 pour racine donc il existe un unique P tel que $D = (X - 1)P$, et d'après la question 4, $P \in \mathcal{P}$:

$$\lfloor \forall D \in \mathcal{D}, \exists ! P \in \mathcal{P}, D = (X - 1)P.$$

6. Sur le même principe, si $P \in \mathcal{P}$ est de degré impair, il admet -1 pour racine et il s'écrit de manière unique $P = (X + 1)Q$ et comme $X + 1 \in \mathcal{P}$, d'après la question 4 $Q \in \mathcal{P}$:

$$\lfloor \forall P \in \mathcal{P}, (\deg(P) \in 2\mathbb{N} + 1) \iff \exists ! Q \in \mathcal{P}, P = (X + 1)Q.$$

7. UNICITÉ. Si P et Q vérifient la propriété de l'énoncé, en substituant à X tout réel non nul x , on voit que P et Q coïncident en une infinité de réels, donc ils sont égaux.

EXISTENCE. Dans une manipulation tournée vers une éventuelle récurrence, on voit que si $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\left(X^p + \frac{1}{X^p}\right) \left(X + \frac{1}{X}\right) \\ &= X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}} + X^{p-1} + \frac{1}{X^{p-1}}. \end{aligned}$$

Montrons donc par une récurrence double la phrase

$$\mathcal{H}(p) : \ll \exists P_p \in \mathbb{R}[X], X^p + \frac{1}{X^p} = P_p \left(X + \frac{1}{X}\right) \gg,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On a clairement

$$X^0 + \frac{1}{X^0} = 2 = P_0 \left(X + \frac{1}{X}\right)$$

avec $P_0 = 2$ et

$$X^1 + \frac{1}{X^1} = P_1 \left(X + \frac{1}{X}\right)$$

avec $P_1 = X$, donc $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{H}(p - 1)$ et $\mathcal{H}(p)$ vraies. Alors, d'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} &X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}} \\ &= \left(X^p + \frac{1}{X^p}\right) \left(X + \frac{1}{X}\right) - X^{p-1} + \frac{1}{X^{p-1}} \\ &= P_p \left(X + \frac{1}{X}\right) \left(X + \frac{1}{X}\right) - P_{p-1} \left(X + \frac{1}{X}\right) \\ &= P_{p+1} \left(X + \frac{1}{X}\right) \end{aligned}$$

où l'on a posé $P_{p+1} = X P_p - P_{p-1}$. Donc $\mathcal{H}(p + 1)$ est vraie. On a bien démontré que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{H}(p - 1) \text{ et } \mathcal{H}(p)) \implies \mathcal{H}(p + 1).$$

Conclusion. Par le principe de récurrence double, $\mathcal{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

DEGRÉ. Comme $P_{p+1} = X P_p - P_{p-1}$, une récurrence immédiate prouve que $\deg(P_p) = p$.

8. Soit R réciproque. S'il était dans $\mathcal{D}$, il aurait 1 comme racine, donc $\lfloor R \in \mathcal{P}$.

S'il était de degré impair, il aurait -1 comme racine, donc $\lfloor R$ est de degré pair.

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ avec $a_{2n-k} = a_k$ pour tout k . Si $n = 0$, l'affirmation de l'énoncé est évidente. Si $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n-k} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^{2n-j} \\ &= X^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k-n} + a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{n-k} \right) \\ &= X^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k (X^{k-n} + X^{n-k}) + a_n \right) \\ &= X^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_{n-k} \left(X + \frac{1}{X}\right) + a_n \right) \\ &= X^n P \left(X + \frac{1}{X}\right), \end{aligned}$$

en notant $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_{n-k} + a_n$ et où les P_k sont définis à la question précédente. Comme R ne s'annule pas en 0,

$$\lfloor \text{il existe bien un polynôme } P \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}^*, R(x) = 0 \iff P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Le polynôme P n'est pas unique, ni même son degré. En effet, par exemple, le polynôme réciproque $X^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après la question 4, $(X^2 + 1)R$ est dans $\mathcal{P}$ et de degré pair. D'après ce qui précède, il existe P_1 tel que $(x^2 + 1)R(x) = 0 \iff P_1\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$ et comme $(X^2 + 1)R$ et R ont les mêmes racines, on voit que $R(x) = 0 \iff P_1\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Quatrième exercice

A.1. La fonction z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, avec la formule de Leibniz, pour tout $x > 0$,

$$z''(x) = \sqrt{x}y''(x) + 2\frac{1}{2\sqrt{x}}y'(x) - \frac{1}{4x^{3/2}}y(x).$$

Multiplions par $x^{3/2}$ pour retrouver le premier membre de (1) :

$$\begin{aligned} x^{3/2}z''(x) &= x^2y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) \\ &= (n^2 - x^2)y(x) - \frac{1}{4}y(x). \end{aligned}$$

En divisant maintenant par $x^{3/2}$,

$$\begin{aligned} z''(x) &= \left(n^2 - \frac{1}{4} - x^2\right) \frac{y(x)}{x^{3/2}} \\ &= \left(n^2 - \frac{1}{4} - x^2\right) \frac{\sqrt{x}y(x)}{x^2} \\ &= \left(\frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - 1\right) z(x). \end{aligned}$$

Ainsi, z vérifie l'équation (2) en posant

$$q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}.$$

Où l'on voit bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 1$.

A.2. L'équation différentielle (2) est sous forme normale. La fonction nulle en est une solution, qui vérifie en outre la condition initiale $z(x) = z'(x) = 0$ pour un $x > 0$. En vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est la seule. Donc par contraposition, si z n'est pas la fonction nulle,

pour tout $x > 0$, $(z(x), z'(x)) \neq (0, 0)$.

Soit α un zéro de z qui n'est pas la solution nulle. Avec ce qui précède, $z'(\alpha) \neq 0$. Comme z' est continue, il existe un $\eta > 0$ tel que sur $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$, z' garde le même signe que $z'(\alpha)$. Donc sur cet intervalle, z est strictement monotone, donc elle ne s'y annule qu'une seule fois.

α est un zéro isolé de z .

B.1. L'équation (3) s'écrit bien comme le suggère l'énoncé. Sous cette forme, l'équation homogène associée, $z'' + z = 0$, admet l'ensemble des solutions

$$\{x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Considérons une solution « simple » de cet ensemble, par exemple $\cos$, et grâce à la méthode de variation de la constante, cherchons les solutions de (3) sous la forme $z = \alpha \cos$, où α est deux fois dérivable.

Commentaire. D'après le cours, il faudrait que $\cos$ ne s'annule pas sur l'intervalle de résolution. Menons un calcul formel sans nous inquiéter pour l'instant.

En reportant dans (3),

$$\alpha'' \cos - 2\alpha' \sin - \alpha \cos + \alpha \cos = g,$$

c'est-à-dire

$$\alpha'' \cos - 2\alpha' \sin = g.$$

Où l'on voit que $\gamma = \alpha'$ est solution de l'équation d'ordre 1

$$(4) \quad \gamma' \cos - 2\gamma \sin = g.$$

L'équation homogène $\gamma' \cos - 2\gamma \sin = 0$ admet l'ensemble des solutions

$$\begin{aligned} \left\{x \mapsto \delta \exp\left(2 \int \frac{\sin}{\cos}\right) = \delta \exp(-2 \ln|\cos|)\right. \\ \left. = \frac{\delta}{\cos^2}, \delta \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Toujours grâce à la méthode de variation de la constante, cherchons les solutions γ de (4) sous la forme $\gamma = \delta/\cos^2$ où δ est une fois dérivable. En reportant dans (4),

$$\frac{\delta'}{\cos^2} \cos = g,$$

ou encore $\delta' = g \cos$. En utilisant le réel x_0 de l'énoncé, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > 0$,

$$\delta(x) = \int_{x_0}^x g(u) \cos(u) du + A.$$

Comme $\gamma = \delta/\cos^2$ et que $\alpha' = \gamma$,

$$\alpha'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \int_{x_0}^x g(u) \cos u du + \frac{A}{\cos^2 x}.$$

Il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\cos^2 t} \left(\int_{x_0}^t g(u) \cos u du \right) dt \\ &\quad + A \tan x + B. \end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \left[\tan t \int_{x_0}^t g(u) \cos u du \right]_{x_0}^x \\ &\quad - \int_{x_0}^x g(t) \cos t \tan t dt + A \tan x + B \\ &= \tan x \int_{x_0}^x g(u) \cos u du \\ &\quad - \int_{x_0}^x g(t) \sin t dt + A \tan x + B. \end{aligned}$$

Comme $z = \alpha \cos$,

$$\begin{aligned} z(x) &= \sin x \int_{x_0}^x g(u) \cos u du \\ &\quad - \cos x \int_{x_0}^x g(u) \sin u du + A \sin x + B \cos x \\ &= \int_{x_0}^x g(u) (\sin x \cos u - \sin u \cos x) du \\ &\quad + A \sin x + B \cos x \\ &= \int_{x_0}^x g(u) \sin(x - u) du \\ &\quad + A \sin x + B \cos x. \end{aligned}$$

Finalement, comme A et B sont arbitraires, on ne perd pas de généralité en les échangeant. Compte tenu que $g(u) = -\lambda z(u)/u^2$,

$$\boxed{z(x) = A \cos x + B \sin x + \lambda \int_{x_0}^x z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2}.}$$

Commentaire. Nous trouvons un plan affine de solutions, comme le cours le prévoit. Nous avons donc toutes les solutions et le calcul formel est validé.

B.2.a) Si $x \geq x_0$, en majorant ci-dessus avec l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |z(x)| &\leq |A| + |B| + |\lambda| \int_{x_0}^x |z(u)| \frac{du}{u^2} \\ &= |A| + |B| + |\lambda| h(x). \end{aligned}$$

En divisant par x^2 ,

$$\frac{|z(x)|}{x^2} \leq \frac{|A| + |B|}{x^2} + \frac{|\lambda|}{x^2} h(x).$$

Comme $|z|$ est continue sur $[x_0, +\infty[$, h y est C^1 et

$$h'(x) = \frac{|z(x)|}{x^2}.$$

Donc

$$\boxed{h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x) \leq \frac{M}{x^2} \text{ où } \mu = |\lambda| \text{ et } M = |A| + |B|.$$

B.2.b) En multipliant par $e^{\mu/x}$ qui est positif,

$$h'(x) e^{\mu/x} - \frac{\mu}{x^2} e^{\mu/x} h(x) \leq \frac{M}{x^2} e^{\mu/x},$$

c'est-à-dire, sachant que $\mu \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} (h(x) e^{\mu/x}) \leq -\frac{M}{\mu} \frac{d}{dx} (e^{\mu/x}).$$

En intégrant,

$$h(x) e^{\mu/x} - h(x_0) e^{\mu/x_0} \leq -\frac{M}{\mu} (e^{\mu/x} - e^{\mu/x_0}),$$

ou encore, puisque $e^{\mu/x} > 1$,

$$\begin{aligned} h(x) &\leq h(x) e^{\mu/x} \leq h(x_0) e^{\mu/x_0} + \frac{M}{\mu} (e^{\mu/x_0} - e^{\mu/x}) \\ &\leq h(x_0) e^{\mu/x_0} + \frac{M}{\mu} e^{\mu/x_0}. \end{aligned}$$

Ainsi, h est bornée sur $[x_0, +\infty[$.

En revenant à la majoration du début de la question B.2.a, pour $x \geq x_0$,

$$|z(x)| \leq M + \mu |h(x)|.$$

Puisque h est bornée, $|z|$ l'est.

B.3.* Alors, $\|z\|_{\infty}^{[x_0, +\infty[}$ est bien définie. En la nommant Z_0 , pour tout $x \geq x_0$ et tout $u \geq x$,

$$\left| \frac{z(u) \sin(u-x)}{u^2} \right| \leq \frac{Z_0}{u^2}.$$

Or $u \mapsto 1/u^2$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned} &\left| \int_x^{+\infty} z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2} \right| \\ &\leq \int_x^{+\infty} \left| \frac{z(u) \sin(u-x)}{u^2} \right| du \\ &\leq Z_0 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{Z_0}{x}. \end{aligned}$$

Cela signifie qu'en $+\infty$,

$$\boxed{\int_x^{+\infty} z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right).}$$

Alors, avec la question B.1,

$$\begin{aligned} z(x) &= A \cos x + B \sin x \\ &+ \lambda \int_{x_0}^{+\infty} z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2} \\ &- \lambda \int_x^{+\infty} z(u) \sin(u-x) \frac{du}{u^2} \\ &= A \cos x + B \sin x \\ &+ \lambda \cos x \int_{x_0}^{+\infty} z(u) \sin u \frac{du}{u^2} \\ &- \lambda \sin x \int_{x_0}^{+\infty} z(u) \cos u \frac{du}{u^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \underbrace{\left(A + \lambda \int_{x_0}^{+\infty} z(u) \sin u \frac{du}{u^2} \right)}_{= a} \cos x \\ &+ \underbrace{\left(B - \lambda \int_{x_0}^{+\infty} z(u) \cos u \frac{du}{u^2} \right)}_{= b} \sin x + O\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Si $a = b = 0$, choisissons $\alpha = \beta = 0$. Sinon,

$$\begin{aligned} &a \cos x + b \sin x \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right). \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$. Comme

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\alpha}\right)^2 = 1,$$

il existe β tel que

$$\frac{a}{\alpha} = \cos \beta \text{ et } \frac{b}{\alpha} = \sin \beta,$$

donc

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \alpha (\cos \beta \cos x + \sin \beta \sin x) \\ &= \alpha \cos(x - \beta). \end{aligned}$$

Finalement, en $+\infty$,

$$\boxed{z(x) = \alpha \cos(x - \beta) + O\left(\frac{1}{x}\right).}$$