Concours blanc bis

[CS19]
4 heures
Calculatrices autorisées

Le sujet est composée de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment à la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A – Dérivées successives

Q 1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

Q 3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

Q 4. Montrer

$$\forall x \in I,\ 2\,f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0).$$

Q 5. Montrer $2\,\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\,\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k\,\alpha_{n-k}.$$

I.B – Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

Q 6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[,\ \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

Q 7. En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

Q 8. Montrer

$$\forall x \in I,\ 2\,g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

Q 9. Montrer

$$\forall x \in I, f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$.

Q 10. En déduire que $R = \pi/2$.

I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

Q 12. En déduire

$$\forall x \in I,\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2\,n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\text{et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2\,n)!} x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

Q 13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Q 14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.

Q 15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2\,k-1} \alpha_{2k-1}\,\alpha_{2n-2k+1}.$$

II Équivalent de α_{2n+1}

II.A – La fonction zêta

Pour tout $s>1$, on pose $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

Q 16. Montrer que ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

Q 17. Encadrer $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ par deux intégrales et en déduire $\lim_{s\to+\infty}\zeta(s)=1$.

18. Déterminer $C(s)$ tel que

$$\forall s\in\,]1,+\infty[,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}=C(s)\zeta(s).$$

II.B – Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose

$$I_n(x)=\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)\,(\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Q 19. Montrer

$$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\forall x\in\mathbb{R},$$
$$\left(1-\frac{4x^2}{n^2}\right)I_n(x)=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}(x)$$
$$\text{et }\left(1-\frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)}=\frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

Q 20. Montrer

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(\pi x)=\pi x\frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

Q 21. En déduire

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\,]0,1[,$$
$$\cos(\pi x)=\frac{1}{2}\,\frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\,\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\prod_{p=1}^{n}\left(1-\frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

II.C – Un autre développement de tangente

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J=[0,1/2[$ et, pour tout entier naturel n et tout réel x de J,

$$S_n(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\right).$$

Q 22. Montrer

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall s\in\,]1,+\infty[,$$
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}\leqslant\frac{1}{2(s-1)}\,\frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

Q 23. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction S_n est définie sur J.

Q 24. Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur J vers la fonction nulle.

Q 25. En dérivant $x\mapsto\ln(\cos(\pi x))$, montrer

$$\forall x\in J,\ \pi\tan(\pi x)=-\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)}+\frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

Q 26. Montrer

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in J,$$
$$\pi\tan(\pi x)+S_n(x)=-\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)}+\frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)}+\sum_{p=1}^{+\infty}2\,(2^{2p}-1)\,\zeta(2p)\,x^{2p-1}.$$

Q 27. Montrer l'inégalité $t\cos(t)\leqslant\sin(t)$, pour tout t de $[0,\pi/2]$.

Q 28. En déduire

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,1],\ 0\leqslant -I'_n(x)\leqslant\frac{4x}{n}\,I_n(x)$$

puis, pour $x\in[0,1]$, la limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

Q 29. En déduire l'égalité

$$\forall x\in J,\ \pi\tan(\pi x)=\sum_{p=1}^{+\infty}2\,(2^{2p}-1)\,\zeta(2p)\,x^{2p-1}.$$

II.D – Un équivalent de α_{2n+1}

Q 30. Montrer

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_{2n+1}=\frac{2\,(2^{2n+2}-1)\,(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\,\zeta(2n+2).$$

Q 31. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsque n tend vers l'infini.

III Permutations alternantes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une liste de n nombres réels. On dit que la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i (x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i (x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Autrement dit, la liste $(x_1, \dots, x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation σ par la liste des images $(\sigma(1), \dots, \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

III.A – Dénombrement des permutations alternantes

Q 32. Déterminer les permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

Q 33. Montrer, pour tout $n \geqslant 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geqslant 2$, on note β_n le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$, et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

Q 34. Soient k et n deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$ et A une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$. On considère les listes $(x_1, \dots, x_k)$ constituées de k éléments deux à deux distincts de A. Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à β_k.

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

Q 35. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$2\,\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \, \beta_{n-k}.$$

Pour $k \in [0, n]$, dénombrer les permutations σ alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1, n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.

Q 36. En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.B – Permutations aléatoires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on munit l'ensemble Ω_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. On note p_n la probabilité qu'une permutation dans Ω_n soit alternante montante. On convient de plus que $p_0 = p_1 = 1$.

Q 37. Montrer que la suite (p_n) tend vers 0. Donner un équivalent de p_{2n+1} quand n tend vers l'infini.

On définit une variable aléatoire M_n sur Ω_n en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

- $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$;
- $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$;
- $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(4)$;
- $\dots$
- $M_n(\sigma) = n + 1$ si σ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k + 1$, où k est le plus grand entier tel que $(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ soit alternante montante. On note $\mathbb{E}(M_n)$ l'espérance de M_n.

Q 38. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, montrer $\mathbb{P}(M_n > i) = p_i$.

Q 39. Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ en fonction de $p_0, p_1, \dots, p_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n) = \dfrac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}$.

• • • FIN • • •