Concours blanc ter

[ENS21]
4 h
Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule

On s'intéresse dans ce problème à certains sous ensembles de l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur $]0,+\infty[$. On peut classiquement définir les opérateurs d'intégration J et de dérivation D de sorte qu'en particulier la composition $D\circ J$ est l'opérateur identité, où la notation $\circ$ désigne l'opérateur de composition usuel. On cherche alors à définir pour tout réel $\alpha>0$ des opérateurs fractionnaires d'intégration J^α et de dérivation D^α tels que $D^\alpha\circ J^\alpha$ est l'identité et tels que pour tout $\alpha,\beta>0$ on aurait

$$J^\alpha\circ J^\beta=J^{\alpha+\beta} \text{ et } D^\alpha\circ D^\beta=D^{\alpha+\beta}.$$

En particulier pour $\alpha=1/2$, on cherche à définir une racine carrée de D, i.e. un opérateur $D^{1/2}$ tel que $D^{1/2}\circ D^{1/2}=D$.

Parmi les nombreuses approches possibles, nous allons suivre celles de Riemann-Liouville et Caputo.

- On commence par des préliminaires sur la fonction Gamma.
- On démontre ensuite une version simple du théorème de Fubini pour des fonctions continues sur un carré et qu'on s'autorisera à utiliser dans la suite du problème dans un cadre plus général, cf. la question 2).
- On introduit enfin la transformation de Laplace et on prouve son caractère injectif sur les fonctions continues.

L'intégration fractionnaire est définie dans la partie A alors que les dérivées fractionnaires le seront dans la partie B. Dans la dernière partie on s'intéressera enfin à deux équations différentielles fractionnaires simples.

Le candidat est libre d'admettre les résultats de la partie Préliminaires, *pour aborder les parties A, B et C. Pour simplifier les arguments dans les préliminaires on se restreint aux fonctions continues sur* $[0,+\infty[$ *alors qu'on aura parfois besoin de considérer des fonctions continues sur* $]0,+\infty[$ *intégrables en* 0. *Le candidat est autorisé à utiliser les résultats des préliminaires dans ce cadre plus général.*

Préliminaires

1) On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

1-a) Montrer que Γ est bien définie pour x réel strictement positif.

1-b) Montrer que pour tout $x>0$, on a la relation $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ on a $\Gamma(n)=(n-1)!$

On admettra pour la suite que la fonction Gamma précédente peut être prolongée en une fonction qu'on notera encore Γ définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-n : n\in\mathbf{N}\}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ pour tout $x\in\mathbf{R}\setminus\{-n : n\in\mathbf{N}\}$: l'écriture $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ n'est alors valable que pour $x>0$. Pour tout entier $n\in\mathbf{N}$, on pose en outre $\Gamma(-n):=+\infty$.

On utilisera aussi sans justification l'égalité suivante

$$(E_1)\quad B(p,q):=\int_0^1(1-u)^{p-1}\,u^{q-1}\,\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

où p,q sont des réels strictement positifs.

2) Soit $a\in\mathbf{R}$ strictement positif et soit $f:[0,a]\times[0,a]\to\mathbf{R}$ définie et continue. Dans cette question on cherche à établir la version simple suivante du théorème de Fubini

$$(E_2)\quad \int_0^a\mathrm{d}t\left(\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u\right)=\int_0^a\mathrm{d}u\left(\int_u^a f(t,u)\,\mathrm{d}t\right)$$

que le candidat pourra utiliser dans la suite du problème pour $a=+\infty$ lorsque $\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\big(\int_0^t|f(t,u)|\,\mathrm{d}u\big)$ converge.

2-a) i. Pour $t\in[0,a]$ fixé, soit

$$h(\eta)=\int_0^t|f(t+\eta,u)-f(t,u)|\,\mathrm{d}u$$

définie pour $\eta\in[-t,a-t]$. Montrer que h tend vers 0 lorsque η tend vers 0.

ii. Montrer avec soin la continuité de $t\mapsto\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u$ sur $[0,a]$.

iii. Calculer la dérivée de la fonction

$$F(x)=\int_0^x\mathrm{d}t\left(\int_0^t f(t,u)\,\mathrm{d}u\right).$$

2-b) Pour tous $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant a$, on introduit

$$h(\alpha,\beta)=\int_0^\alpha\mathrm{d}u\left(\int_u^\beta f(t,u)\,\mathrm{d}t\right).$$

i. Expliciter la dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial\alpha}(\alpha,\beta)$.

ii. Expliciter $\dfrac{\partial h}{\partial\beta}(\alpha,\beta)$.

iii. Donner alors une expression de la dérivée de

$$G(x)=\int_0^x\mathrm{d}u\left(\int_u^x f(t,u)\,\mathrm{d}t\right).$$

2-c) Déduire de ce qui précède une preuve de l'égalité (E_2).

3) Pour $f, g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ des fonctions continues, on définit leur produit de convolution

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

3-a) Montrer que $f * g$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3-b) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

3-c) Montrer que le produit de convolution est associatif.

4) Une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels $M > 0$ et r tels que pour tout $t \geqslant 0$, on a $|f(t)| \leqslant M\, e^{rt}$. Pour une telle fonction f, on définit alors sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

4-a) Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout réel s assez grand.

4-b) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec f et f' d'ordre exponentiel, alors pour s assez grand,

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\, \mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

4-c) Soient f et g des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel. Montrer que $f * g$ est d'ordre exponentiel.

4-d) Sous les hypothèses de la question précédente, en utilisant (E_2) pour $a = +\infty$, montrer que, pour s assez grand,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\, \mathcal{L}(g)(s).$$

5) On cherche à présent à montrer que $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pour tout s assez grand si et seulement si $f = g$.

5-a) Justifier qu'on peut se ramener à chercher les fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand.

5-b) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\int_a^b x^n f(x)\, \mathrm{d}x = 0$. Montrer que $\int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.

Indication : on pourra utiliser, sans justification, le théorème d'approximation de Weierstrass qui établit l'existence pour tout $\epsilon > 0$, d'un polynome $p_\epsilon \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_\epsilon(x)| \leqslant \epsilon$.

5-c) En déduire que $\mathcal{L}$ est injective.

Indication : on pourra utiliser un changement de variable $y = e^{-t}$.

Dans la suite du problème le candidat pourra librement utiliser les résultats de ces préliminaires dans le cas où les fonctions ne sont plus nécessairement continues en 0 mais y sont seulement intégrables.

A- Intégration fractionnaire

6) Pour $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable en 0, on note $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ et pour tout $n \geqslant 2$, on définit par récurrence

$$I^n(f)(x) := I^{n-1}(I(f))(x).$$

Montrer que $I^2 f(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$ puis que

$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

7) Pour tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$, on note $\Phi_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

en convenant que pour $\alpha \in \mathbf{Z}$ négatif ou nul, Φ_α est la fonction nulle.

7-a) Quelle est la dérivée m-ème de Φ_α ?

7-b) Montrer, en utilisant (E_1), que pour tout α, β des réels strictement positifs, on a $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$.

7-c) Expliciter $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$ pour $\alpha > 0$.

8) Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit

$$J^\alpha(f)(x) = \Phi_\alpha * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)\, \mathrm{d}u,$$

et on note J^0 l'opérateur identité, i.e. $J^0(f)(x) = f(x)$. D'après la question 6), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a donc $J^n = I^n$.

8-a) Montrer que pour tous réels α, β positifs, on a $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$.

8-b) On suppose f d'ordre exponentiel. Pour $\alpha > 0$, montrer que $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)$ est bien défini pour s assez grand et égal alors à $s^{-\alpha}\, \mathcal{L}(f)(s)$.

8-c) Pour α et γ des réels strictement positifs, montrer que $J^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+\alpha}$.

8-d) Soit f d'ordre exponentiel et soit $\alpha > 0$. Montrer que $J^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f est la fonction nulle.

B- Dérivées fractionnaires

On note D l'opération de dérivation usuel, $D(f)(x) = f'(x)$ lorsque f est dérivable. Par récurrence, lorsque cela est possible, on définit $D^n(f) = D(D^{n-1} f)$ de sorte que trivialement $D^n \circ J^n$ est l'opérateur identité.

9) Pour f dérivable n fois, montrer que

$$J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\, \frac{x^k}{k!}.$$

10) Étant donné un réel $\alpha > 0$, on note m l'entier tel que $m-1 < \alpha \leqslant m$, et on définit $D^\alpha := D^m \circ J^{m-\alpha}$, i.e., sous réserve d'existence,

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m \left(\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} \, \mathrm{d}u \right) & m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t) & \alpha = m, \end{cases}$$

et on note D^0 l'opérateur identité.

Remarque : on ne demande pas au candidat de donner des conditions nécessaires pour l'existence de $D^\alpha f$.

10-a) Pour tout $\alpha > 0$, expliciter $D^\alpha \circ J^\alpha$.

10-b) Pour $f = \mathbf{1}$ expliciter $D^\alpha \mathbf{1}$ et préciser pour quel α, la fonction $D^\alpha \mathbf{1}$ est la fonction nulle.

10-c) Pour $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$, montrer que $D^\alpha \varPhi_\gamma = \varPhi_{\gamma-\alpha}$.

10-d) Pour f d'ordre exponentiel, montrer que $D^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f s'écrit sous la forme $f(x) = \sum_{j=1}^m c_j \, x^{\alpha-j}$ où $m-1 < \alpha \leqslant m$.

11) Loi des exposants.

11-a) Soit $f(t) = \varPhi_{1/2}(t)$ et $\alpha = \beta = 1/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta) f$ et $D^{\alpha+\beta} f$.

11-b) Soit $g = \varPhi_{3/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta) g$, $(D^\beta \circ D^\alpha) g$ et $D^{\alpha+\beta} g$.

11-c) Soit $f(t) = t^\lambda \, \eta(t)$ où $\lambda > -1$ et $\eta(t) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R > 0$. Montrer alors que pour tout $0 \leqslant t < R$, $0 \leqslant \beta < \lambda + 1$ et $\alpha \geqslant 0$, on a $(D^\alpha \circ D^\beta) f = D^{\alpha+\beta} f$.

12) Soit un réel $\alpha > 0$ et $m-1 < \alpha \leqslant m$. On pose alors, sous réserve d'existence, $D_*^\alpha f := J^{m-\alpha} \circ D_m f$, i.e.

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{f^{(m)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} \, \mathrm{d}u & m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t) & \alpha = m. \end{cases}$$

12-a) Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$, telle que $D_*^\alpha f$ est bien définie et égale à la fonction nulle. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$.

12-b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$(D \circ J^\alpha) f(x) = (J^\alpha \circ D) f(x) + f(0) \varPhi_\alpha(x).$$

12-c) Soit $m-1 < \alpha < m$ et soit f de classe $\mathcal{C}^m([0, +\infty[, \mathbf{R})$. Sous réserve d'existence de tous les termes, montrer que

$$D^\alpha f(x) = D_*^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

12-d) En déduire que

$$D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = D_*^\alpha f(x).$$

C- Deux équations différentielles fractionnaires

13) Pour $0 < \alpha < 1$, l'équation d'Abel en g est

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}u = f(t),$$

où f est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel.

13-a) Exprimer $g(t)$ en fonction de $f(t)$ à l'aide de l'opérateur D^α.

13-b) On suppose que g est d'ordre exponentiel. Exprimer la transformée de Laplace de g en fonction de celle de f.

14) Pour $\alpha \geqslant 0$ on introduit la série entière

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

14-a) Calculer $E_0(\theta)$, $E_1(\theta)$ et $E_2(-\theta^2)$.

14-b) Montrer que le rayon de convergence de $E_\alpha(\theta)$ est strictement positif.

14-c) On pose $e_\alpha(t) = E_\alpha(-(t^\alpha))$ et on admet qu'il est d'ordre exponentiel. Montrer que pour $s > 1$, on a

$$\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}.$$

14-d) On pose $u_k(t) := J^k e_\alpha(t)$. Montrer que

$$\mathcal{L}(u_k)(s) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}.$$

15) On cherche à résoudre l'équation $D_*^\alpha u(t) = -u(t)$. Montrer qu'après application de l'opérateur J^α, cette équation devient

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t),$$

où on précisera les c_k.

16) On suppose que $u(t)$ est d'ordre exponentiel. Montrer que

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(u)(s)$$

et en déduire que

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \, u_k(t).$$

FIN DE L'ÉPREUVE