Douzième devoir surveillé

[E3A24]
Les calculatrices sont interdites.
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.

On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de E.

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$$

et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer que :

i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,

ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)\,X.$$

6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.

6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions **4.** et **5.**

6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ.

6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

6.7. Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

6.8. Déterminer T_λ^{-1}.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions sh et ch ainsi que leurs domaines de validité.

1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.

Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$Y = 0$ si X est paire et $Y = 1$ si X est impaire.

2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.

On donnera les résultats en utilisant les fonctions exp, sh et ch.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\} \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

3.1. Préciser $T(\Omega)$.

3.2. Soit k un entier naturel.

En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

3.3. Déterminer la loi de T.

3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?

On donnera le résultat en utilisant les fonctions exp, sh et ch.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

*****

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geqslant 1$.

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.

2.3. Montrer que l'on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ |\varphi'(t)| \leqslant \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}.$$

2.4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
Prouver que l'on a :

$$\forall n \geqslant 1,\ |u_n - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}.$$

4. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

4.1. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

9. *On suppose* que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

9.1. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2.**

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E :

$$(P\,|\,Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n).$$

2.1. Montrer que : $(S\,|\,S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose

$$S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}.$$

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2.**

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

4.2. Prouver que l'ensemble

$$\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

FIN DU SUJET