Treizième devoir surveillé

Le théorème matriciel de Kreiss

[MP22]

3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, le vecteur colonne $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

On admet que l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \mapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. On note

$$\Sigma_n = \{\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\,;\, \|X\| = 1 \,\}.$$

On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}$. Ainsi, si $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $X^T M\, Y$ est un nombre complexe.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M, $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M. Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. Pour $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \sigma(M)$, on note

$$R_z(M) = (z\, I_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{\, z \in \mathbf{C}\,;\, |z| = 1 \,\} \text{ et } \mathbb{D} = \{\, z \in \mathbf{C}\,;\, |z| \leqslant 1 \,\}.$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3. Dans la partie 3, les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6.

1 Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

1 ▷ Justifier que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, l'application

$$X \in \Sigma_n \mapsto \|M\, X\|$$

atteint son maximum, que l'on notera $\|M\|_{\mathrm{op}}$.

Établir les deux propriétés

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\quad \|M\|_{\mathrm{op}} = \max\left\{ \frac{\|M\, X\|}{\|X\|}\,;\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \smallsetminus \{0\} \right\},$$

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2,\quad \|M'\, M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|M'\|_{\mathrm{op}}\, \|M\|_{\mathrm{op}}.$$

On admettra dans la suite que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto \|M\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2 ▷ Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, montrer que

$$\max\{\, |V^T U|\,;\, V \in \Sigma_n \,\} = \|U\|.$$

En déduire que, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, alors

$$\max\{\, |X^T M\, Y|\,;\, (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n \,\} = \|M\|_{\mathrm{op}}.$$

2 L'ensemble $\mathcal{B}_n$

Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $(\|M^k\|_{\mathrm{op}})_{k \in \mathbf{N}}$ soit bornée. Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on pose

$$b(M) = \sup\{\, \|M^k\|_{\mathrm{op}}\,;\, k \in \mathbf{N} \,\}.$$

3 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. Montrer que la suite $(\|M^k X\|)_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Si $\lambda \in \sigma(M)$, si X est un vecteur propre de M associé à λ, exprimer pour $k \in \mathbf{N}$, le vecteur $M^k X$ en fonction de λ, k et X. En déduire que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.

4 ▷ On suppose que $n \geqslant 2$. Indiquer, avec justification, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$, mais n'appartenant pas à $\mathcal{B}_n$.

3 Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On dit que l'élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$ si, pour tout (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, il existe un élément $P_{M,i,j}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$(\mathcal{P}) \qquad \forall z \in \mathbf{C} \smallsetminus \sigma(M),\ (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}.$$

5 ▷ Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifient $\mathcal{P}$. On commencera par le cas des matrices diagonales.

6 ▷ On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$. En déduire que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$, il existe un élément $P_{M,X,Y}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \smallsetminus \sigma(M),\ X^T R_z(M)\, Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}.$$

7 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$ et $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \mathbb{D}$. Montrer que la série de matrices $\sum \frac{M^j}{z^{j+1}}$ converge.

On admettra le fait suivant : soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie ; si $(v_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que la série $\sum N(v_j)$ converge, alors la série $\sum v_j$ converge dans E.

Si $m \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de

$$(z\, I_n - M) \sum_{j=0}^{m} \frac{M^j}{z^{j+1}}.$$

En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}.$$

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on définit la fonction

$$\varphi_M : z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \mapsto (|z|-1)\,\|R_z(M)\|_{\mathrm{op}}.$$

8 ▷ Déduire de la question précédente l'inégalité

$$\forall M \in \mathcal{B}_n, \forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D},\ \varphi_M(z) \leqslant b(M). \tag{1}$$

Soit $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_j$ converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbf{R},\ u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j\, e^{-i(j+1)t}.$$

9 ▷ Justifier l'existence et la continuité de la fonction u.

Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, e^{i(k+1)t}\,\mathrm{d}t = c_k.$$

10 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $r \in \,]1,+\infty[$ et $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$. Déterminer une suite de nombres complexes $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum c_j$ converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ X^T R_{re^{it}}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j\, e^{-i(j+1)t}.$$

Si $k \in \mathbf{N}$, en déduire, en utilisant la question 9, une expression intégrale de $X^T M^k Y$.

4 Variation totale et norme uniforme

Soit $\mathcal{C}^1$ l'espace des fonctions de classe C^1 de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbf{C}$. Pour $f \in \mathcal{C}^1$, on pose

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|\,;\, t \in [-\pi,\pi]\} \text{ et } V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

11 ▷ En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément C de $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1,\ V(f) \leqslant C\,\|f\|_\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $C(f)$ des points de $]-\pi,\pi[$ en lesquels la fonction f' s'annule est fini. On note ℓ le cardinal de $C(f)$ et, si $\ell \geqslant 1$, on désigne par $t_1 < \cdots < t_\ell$ les éléments de $C(f)$. On pose $t_0 = -\pi$ et $t_{\ell+1} = \pi$.

12 ▷ Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|.$$

Pour $0 \leqslant j \leqslant \ell$, soit ψ_j la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\{0,1\}$ égale à 1 sur $[f(t_j), f(t_{j+1})[$ et à 0 sur $\mathbf{R} \setminus [f(t_j), f(t_{j+1})[$. Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j.$$

13 ▷ Si $y \in \mathbf{R}$, montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi,\pi[$ est fini de cardinal majoré par $\ell+1$; on note $N(y)$ ce cardinal.

Si $y \in \mathbf{R}$, exprimer $N(y)$ en fonction de $\psi_0(y), \ldots, \psi_\ell(y)$. En déduire l'inégalité

$$V(f) \leqslant 2\max\{\, N(y)\,;\, y \in \mathbf{R}\,\}\,\|f\|_\infty. \tag{2}$$

5 L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient $F = \dfrac{P}{Q}$ où $P \in \mathbf{C}[X]$ et $Q \in \mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$. Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que P et Q n'aient pas de racine commune dans $\mathbf{C}$; si tel est le cas, les racines de Q dans $\mathbf{C}$ sont, par définition, les pôles de F. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $\mathbb{U}$ de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$.

Soient, dans la suite de cette partie, $F \in \mathcal{R}_n$, P et Q deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$ vérifiant $F = \dfrac{P}{Q}$ et

$$\forall z \in \mathbb{U},\ Q(z) \neq 0.$$

Pour $t \in [-\pi,\pi]$, on pose

$$f(t) = F(e^{it}) = g(t) + i\,h(t) \text{ où } (g(t), h(t)) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour $u \in [-\pi,\pi]$, on définit une fonction f_u de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\begin{aligned}\forall t \in [-\pi,\pi],\ f_u(t) &= g(t)\cos(u) + h(t)\sin(u)\\ &= \mathrm{Re}(e^{-iu}F(e^{it}))\\ &= \mathrm{Re}(e^{-iu}f(t)).\end{aligned}$$

14 ▷ Dans cette question, on fixe $u \in [-\pi,\pi]$ et on suppose que f_u n'est pas constante. On fixe également $y \in \mathbf{R}$. En utilisant éventuellement l'expression de $f_u(t)$ comme partie réelle de $e^{-iu}F(e^{it})$ et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer $S \in \mathbf{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall t \in [-\pi,\pi],\ f_u(t) = y \Longleftrightarrow S(e^{it}) = 0.$$

En déduire que l'ensemble $f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi,\pi[$ est fini de cardinal majoré par $2n$.

15 ▷ En observant que la fonction $|\cos|$ est 2π-périodique, calculer, pour $\omega \in \mathbf{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u-\omega)|\,\mathrm{d}u.$$

En déduire que, si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a\cos(u) + b\sin(u)|\,\mathrm{d}u = 4\sqrt{a^2+b^2}.$$

16 ▷ Exprimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_u'(t)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

en fonction de $V(f)$.

17 ▷ On admet l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_u'(t)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_u'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.$$

On admet aussi que, pour $u\in[-\pi,\pi]$ tel que f_u ne soit pas constante, l'ensemble des points de $]-\pi,\pi[$ en lesquels la fonction f_u' s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14).

En déduire l'inégalité

$$V(f)\leqslant 2\pi n\|f\|_\infty. \tag{3}$$

6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit $M\in\mathcal{B}_n$. L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de

$$b'(M)=\sup\{\,\varphi_M(z)\,;\,z\in\mathbf{C}\smallsetminus\mathbb{D}\,\}$$

et entraine que $b'(M)\leqslant b(M)$. On se propose de majorer $b(M)$ en fonction de $b'(M)$.

Dans les questions 18 et 19, on fixe $r\in\,]1,+\infty[$ et $(X,Y)\in\Sigma_n^2$. Pour $\rho\in\mathbf{R}^{+*}$, on note

$$\mathbb{D}_\rho=\{\,z\in\mathbf{C}\,;\,|z|\leqslant\rho\,\}.$$

18 ▷ Montrer qu'il existe un élément F_r de $\mathcal{R}_n$ dont les pôles sont tous dans $\mathbb{D}_{1/r}$ et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall z\in\mathbf{C}\smallsetminus\mathbb{D}_{1/r},\ |F_r(z)|\leqslant\frac{b'(M)}{r\,|z|-1},$$

$$\forall k\in\mathbf{N},\ X^TM^kY=\frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_r(e^{it})\,e^{i(k+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

19 ▷ En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17, montrer que

$$\forall k\in\mathbf{N},\ |X^TM^kY|\leqslant\frac{r^{k+1}}{(k+1)\,(r-1)}\,n\,b'(M).$$

20. ▷ Démontrer finalement l'inégalité

$$b(M)\leqslant e\,n\,b'(M). \tag{4}$$

Ce résultat de M. N. Spijker (1991) améliore un théorème de H. O. Kreiss (1962). La constante en est asymptotiquement optimale.

Fin du problème