19 10 24

Deuxième devoir surveillé

4 heures
Les calculatrices sont interdites.
Le sujet est composé de 3 problèmes indépendants.

PROBLÈME 1
[CCINP24]

Sur la plage, les drapeaux hissés près des postes de secours avertissent des conditions de baignade liées à l'état de la mer et à la météo.

Les significations des couleurs de drapeaux sont les suivantes :

— drapeau vert : la baignade est surveillée et ne présente pas de danger apparent ;

— drapeau jaune : la baignade est surveillée avec danger limité ou marqué ;

— drapeau rouge : la baignade est interdite.

La couleur d'un drapeau est déterminée par de nombreux facteurs tels que la météo, l'état de la mer ou la présence de sauveteurs pour assurer la sécurité des baigneurs.

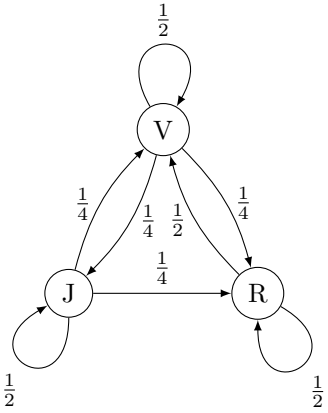
Dans cet exercice, on considère que la couleur d'un drapeau est fixée quotidiennement et on modélise le changement de couleur selon les règles simplifiées suivantes :

— si le drapeau est vert un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et rouge sinon ;

— si le drapeau est jaune un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{4}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon ;

— si le drapeau est rouge un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon. Un drapeau rouge ne peut donc pas passer à l'état jaune le jour suivant.

La situation est résumée sur la **figure suivante** :



On note :

— V_n l'évènement « le drapeau est vert le n^{e} jour » et $v_n = P(V_n)$;

— J_n l'évènement « le drapeau est jaune le n^{e} jour » et $j_n = P(J_n)$;

— R_n l'évènement « le drapeau est rouge le n^{e} jour » et $r_n = P(R_n)$.

On suppose que le drapeau est vert le jour numéro 0.

Q1. a) Soit $n \in \mathbf{N}$. À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, j_n et r_n.

b) Obtenir de même des expressions de j_{n+1} et de r_{n+1} en fonction de v_n, j_n et r_n.

c) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Préciser X_0. Justifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q2. a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c)* La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q3. Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$.

a) On pose $e'_1 = (4, 2, 3)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (a, 0, b)$. Déterminer a et b :

— pour que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de $\mathbf{R}^3$,

— et que dans cette base $\mathcal{B}'$, la matrice de f soit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Préciser la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer Q^{-1}.

c) Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. On attend l'expression détaillée des coefficients de cette matrice.

On pourra utiliser le binôme de Newton sur une expression du type $D + N$ où D et N sont deux matrices bien choisies.

d) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, en déduire une expression de X_n en fonction de n, T, Q et X_0.

Q4. À l'aide des résultats précédents, déterminer des expressions explicites pour v_n, j_n et r_n.

Q5. Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau ?

PROBLÈME 2

[CCP18]

Notations et définitions

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

— $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

— $\mathbf{R}[X]$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

— Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équations lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles.

Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q6. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X],\ \Delta(P) = X\,P'.$$

Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k)$.

Q7. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2\,P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

Q8. Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ.

Q9. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q10. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X],\ \Phi(P) = X^2\,P'' + a\,X\,P'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\,\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q11. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q12.* Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X],\ \varphi(P) = X^2\,P'' + a\,X\,P' + b\,P.$$

Q13. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.

Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q14. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)\,s + b = 0. \tag{1}$$

Q15. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0, n]\!]$.

Q16. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

Q17. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = 0, \tag{2}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Q18. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q19. Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)\,u' + b\,u = 0. \tag{3}$$

Q20. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

Q21. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

Q22. Montrer que si y est solution de (2) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbf{R}$.

Q23. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

PROBLÈME 3

[CCP20]

Partie I – Exemple

Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = \frac{1}{4}(x+3y, 3x+y)$.

Q24. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et en déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id})$.

Q25.* Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

Partie II – Cas général

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n appartenant à $\mathbf{N}^*$.

On note $\mathfrak{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.

On considère f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Q26. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f.

Q27. Justifier que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Q28. Montrer que : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$

Q29. Calculer $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E)$. En déduire que $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Q30. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et Id_E.

Q31. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que : $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$.

Déterminer a_0, b_0, a_1 et b_1. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour n dans $\mathbf{N}$.

Q32. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour n élément de $\mathbf{N}$.

Q33. Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n).