Quatrième devoir surveillé

Exercice [E3A16]

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et φ_x la fonction qui à tout réel t associe $\varphi_x(t) = \max(x, t)$.

1.1 Donner une représentation graphique de φ_x .

1.2 Calculer $\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) dt$.

1.3 Donner une représentation graphique de Φ .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on admet que l'on définit une variable aléatoire Y , définie sur le même espace probabilisé, par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt.$$

2. Dans cette question, X suit une loi géométrique. Déterminer $Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

3. Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

3.1 Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = x])$ où $x \in X(\Omega)$ et l'espérance de X .

3.2 Déterminer $Y(\Omega)$ et donner la loi de probabilité de Y .

4. On suppose dans cette question que

$$X(\Omega) = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

et que

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

4.1 Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2})$.

4.2 Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y puis calculer son espérance.

4.2 On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $Z = X Y$. Justifier que

$$Z(\Omega) = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{16}, 4 \right\}.$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z .

4.4 Calculer la covariance des deux variables aléatoires X et Y .

T.S.V.P.

Problème [CCINP19]

Notations et définitions

- Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée.
- $\mathbf{M}_p(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$. $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$.
- On note I_p la matrice identité de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ et 0_p la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ ne comportant que des 0.
- On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$.
- Étant donnée une matrice $M \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, on note $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M .

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I - Éléments propres d'une matrice

I.1 - Localisation des valeurs propres

Soit une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Q1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Q2. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q3. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ sont réelles.

Q4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$

Q5. En utilisant la question **Q4**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q6. Établir, pour $n \geq 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.

En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n , U_{n-1} et U_{n-2} .

Q7. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q8. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est

$$\left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$.

Q9. Montrer que pour tout vecteur propre

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de $A_n(0, 1)$ associé à la

valeur propre $2 \cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j) x_1 + x_2 = 0, \\ x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) x_k + x_{k+1} = 0, \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j) x_n = 0. \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q10. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont on précisera la dimension.

Q11. Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q12. En déduire l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$.

Q13. En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II - Système différentiel

II.1 - Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que C et D commutent.

Q14. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$(1) \quad \det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC).$$

Q15. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q16. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $p \geq p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p} I_n$ soit inversible.

Q17. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

Q18. Montrer que $\text{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C}; \mu^2 \in \text{Sp}(M)\}$.

Q19. Soient $\mu \in \text{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$

un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2 . Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ .

Q20. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 - Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2, \\ x_2'' = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Q21. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$,

$$\text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R}).$$

Q22. En utilisant la question **Q18**, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Q23. En utilisant la question **Q19**, déterminer une matrice inversible $P \in \mathbf{M}_4(\mathbf{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

Q24. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

Q25. Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales

$$(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0).$$

FIN