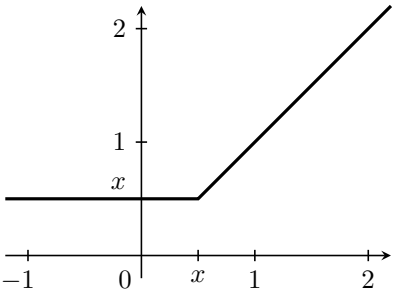
Corrigé du cinquième devoir surveillé

Exercice

1.1. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leqslant x, \\ t & \text{si } t > x. \end{cases}$$

Voici le graphe de φ_x, ici pour $x = \frac{1}{2}$.



1.2. Si $x < 0$, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_x(t) = t$ donc

$$\Phi(x) = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

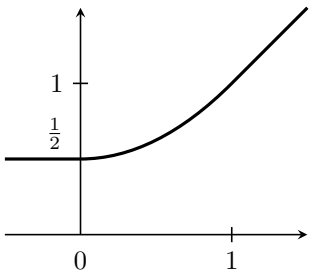
Si $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^x \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{1+x^2}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, si $x > 1$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}t = x$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}}$$

1.3. Voici le graphe de Φ.



2. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 1$, donc par définition, $Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega)$. Autrement dit, $\boxed{Y = X.}$

3.1. D'après le cours,

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0,n]\!],\ \text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ et } \mathbb{E}(X) = np.}$$

3.2. Par définition, $Y = \Phi(X)$. Si $X = 0$, $Y = \frac{1}{2}$ et si $X \geqslant 1$, $Y = X$. Alors

$$\boxed{Y(\Omega) = \{\tfrac{1}{2}\} \cup [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(Y = \tfrac{1}{2}) = 1-p \text{ et pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

4.1. Comme $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{P}(X=\tfrac{1}{2})} &= 1 - \sum_{x \in X(\Omega) \setminus \{\frac{1}{2}\}} \mathbb{P}(X=x) \\ &= 1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3} \underline{= \tfrac{5}{12}}. \end{aligned}$$

4.2. Si $X = -1$ ou $X = 0$, $Y = \frac{1}{2}$; si $X = \frac{1}{2}$, $Y = \frac{1}{2}(1+X^2) = \frac{5}{8}$; et si $X = 2$, $Y = X = 2$. Alors

$$\boxed{\begin{aligned} &Y(\Omega) = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}, 2\right\}, \\ &\mathbb{P}(Y=\tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=0) = \tfrac{1}{4}, \\ &\mathbb{P}(Y=\tfrac{5}{8}) = \mathbb{P}(X=\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{12}, \\ &\text{et } \mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=2) = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}}$$

Par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbb{E}(Y)} &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(Y=\tfrac{1}{2}) + \tfrac{5}{8}\mathbb{P}(Y=\tfrac{5}{8}) + 2\mathbb{P}(Y=2) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{3} \underline{= \tfrac{101}{96}}. \end{aligned}$$

4.3. D'après la question précédente, si $X = -1$, $Y = \frac{1}{2}$ donc $Z = -\frac{1}{2}$; si $X = 0$, $Z = 0$; si $X = \frac{1}{2}$, $Y = \frac{5}{8}$ donc $Z = \frac{5}{16}$; et si $X = 2$, $Y = 2$ donc $Z = 4$.

$$\boxed{\text{Donc } Z(\Omega) = \left\{-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{5}{16}, 4\right\}.}$$

En fait, $Z = X\Phi(X)$. Or clairement, la fonction

$$x \mapsto x\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}(x+x^3) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

croît strictement, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc pour tout $z \in Z(\Omega)$, il existe un unique $x \in X(\Omega)$ tel que $z = x\Phi(x)$, ce que l'on a vu ci-dessus, et $\mathbb{P}(Z=z) = \mathbb{P}(X=x)$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z=-\tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(X=-1) = \tfrac{1}{8}, \\ &\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X=0) = \tfrac{1}{8}, \\ &\mathbb{P}(Z=\tfrac{5}{16}) = \mathbb{P}(X=\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{12}, \\ &\mathbb{P}(Z=4) = \mathbb{P}(X=2) = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}}$$

4.4. D'après le théorème de König-Huygens,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Z) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} z\,\mathbb{P}(Z=z) \\ &= -1\cdot\tfrac{1}{8} + 0\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{5}{16}\cdot\tfrac{5}{12} + 4\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{269}{192}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)} = \frac{269}{192} - \frac{3}{4}\cdot\frac{101}{96} \underline{= \frac{235}{384}}$.

Problème

1. Deux endomorphismes semblables ont des matrices semblables, donc ont même trace. Alors si u vérifie **(C3)**, $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(-u) = -\mathrm{Tr}(u)$, donc $\boxed{\mathrm{Tr}(u) = 0.}$

2. On sait que le polynôme caractéristique de u est donné par $\chi_u = X^2 - \mathrm{Tr}(u)\,X + \det(u) = X^2 - \delta^2$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ donc $\boxed{u^2 = \delta^2\,\mathrm{I}_E.}$

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u. Or $\det(u) \neq 0$ donc $\delta \neq 0$ et les racines de χ_u sont $\pm\delta$, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{-\delta, \delta\}.}$

Ainsi, u admet deux valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable. Alors, les sous-espaces propres de u ont pour dimension la multiplicité des valeurs propres associées, ce sont donc des droites :

$\boxed{\dim E_{-\delta}(u) = \dim E_\delta(u) = 1.}$

3. Posons $E_\delta(u) = \mathbf{C}\,e_1$ et $E_{-\delta}(u) = \mathbf{C}\,e_2$, de sorte que $u(e_1) = \delta\,e_1$ et $u(e_2) = -\delta\,e_2$. Introduisons $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$, $F = \mathbf{C}\varepsilon_1$ et $G = \mathbf{C}\varepsilon_2$. On voit que $u(\varepsilon_1) = \delta\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_2) = \delta\varepsilon_1$, donc $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Comme la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est clairement libre, puisque son déterminant dans la base (e_1, e_2) de vecteurs propres de u est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

on voit que $E = F \oplus G$.

$\boxed{\text{Cela signifie que } u \text{ est échangeur.}}$

4. En calculant par blocs,

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}^2} = \begin{bmatrix} 0_n^2 + B\,0_{p,n} & 0_n\,B + B\,0_p \\ 0_{p,n}\,0_n + 0_p\,0_{p,n} & 0_{p,n}\,B + 0_p^2 \end{bmatrix} = \underline{0_{n+p}.}$$

Sur le même principe $\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix}^2 = 0_{n+p}$, donc

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}.$$

$\boxed{M \text{ est la somme de deux matrices de carré nul.}}$

5. Clairement $D^2 = I_{n+p}$, donc

$\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1} = D.}$

De plus

$$\boxed{D\,M\,D^{-1}} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{bmatrix} = \underline{-M.}$$

$\boxed{\text{Cela signifie que } M \text{ et } -M \text{ sont semblables.}}$

6. Soit M la matrice de u dans la base $\mathbf{B}$. Par construction, les colonnes de M sont les coordonnées dans $\mathbf{B}$ des vecteurs

$$u(f_1), \ldots, u(f_n), u(g_1), \ldots, u(g_p).$$

Comme $u(F) \subset G$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(f_j) \in G$ donc on peut écrire

$$u(f_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\,g_i \text{ où } a_{ij} \in \mathbf{C}.$$

De même, comme $u(G) \subset F$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(g_j) \in F$ donc

$$u(g_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,f_i \text{ où } b_{ij} \in \mathbf{C}.$$

Alors, en posant $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{C})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, la matrice M s'écrit par blocs

$$\boxed{M = \mathrm{mat}_{\mathbf{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}.}$$

7. Soit u un endomorphisme échangeur. Reprenons les notations de l'énoncé.

Supposons que F et G soient non nuls. D'après la question 6, il existe une base $\mathbf{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}$$

où $n = \dim F$ et $p = \dim G$. D'après la question 4,

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$$

où ces deux matrices sont de carré nul. En introduisant les endomorphismes a et b de matrices respectives

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$$

dans la base $\mathbf{B}$, clairement $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$, ce qui signifie que $\boxed{u \text{ vérifie la condition } \textbf{(C2)}.}$

D'après la question 5, M est semblable à $-M$, donc u est semblable à $-u$ et $\boxed{u \text{ vérifie la condition } \textbf{(C3)}.}$

Supposons maintenant que F ou G est réduit à $\{0\}$: comme F et G jouent des rôles symétriques, disons que $G = \{0\}$. Cela signifie que $E = F$ et que $u(F) = \{0\}$, autrement dit u envoie E sur $\{0\}$, donc u est l'endomorphisme nul :

$\boxed{\text{il vérifie bien-sûr les conditions } \textbf{(C2)} \text{ et } \textbf{(C3)}.}$

8. Comme $f^2 = 0$, $\boxed{\mathrm{Im}\,f \subset \mathrm{Ker}\,f.}$ En effet, pour tout $y \in \mathrm{Im}\,f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $f(y) = f^2(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker}\,f$.

Cela entraine que $\dim \mathrm{Im}\,f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,f$. Alors d'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}\,f + \dim \mathrm{Ker}\,f \leqslant 2\dim \mathrm{Ker}\,f$$

$\boxed{\text{d'où } \dim \mathrm{Ker}\,f \geqslant \tfrac{1}{2}\dim E.}$

9. Ainsi,

$$\text{(9.1)} \qquad \operatorname{Im} a \subset \operatorname{Ker} a,\ \operatorname{Im} b \subset \operatorname{Ker} b,$$

$$\text{(9.2)} \quad \dim \operatorname{Ker} a \geqslant \tfrac{1}{2} \dim E,\ \dim \operatorname{Ker} b \geqslant \tfrac{1}{2} \dim E.$$

En outre, soit $x \in \operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Ker} b$. Alors

$$u(x) = a(x) + b(x) = 0 + 0 = 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker} u$. Et comme u est un automorphisme de E, $x = 0$. Alors $\operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Ker} b = \{0\}$ et la somme $\operatorname{Ker} a + \operatorname{Ker} b$ est directe.

Alors, avec les inégalités (9.2),

$$\dim(\operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b) = \dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Ker} b \geqslant \dim E.$$

Or $\dim(\operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b) \leqslant \dim E$ car $\operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b \subset E$. Donc $\dim(\operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b) = \dim E$ d'où

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b.}$$

Alors les inclusions (9.1) sont des égalités, car si l'une au moins était stricte, l'une au moins des inégalités (9.2) serait stricte, d'après les calculs de la question 8, et l'on aurait $\dim(\operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b) > \dim E$, ce qui n'est pas puisque $E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Im} a = \operatorname{Ker} a \text{ et } \operatorname{Im} b = \operatorname{Ker} b.}$$

10. Posons $F = \operatorname{Ker} a = \operatorname{Im} a$ et $G = \operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b$. On a bien $E = F \oplus G$. Soit $x \in F$: $a(x) = 0$ et

$$u(x) = (a + b)(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \operatorname{Im} b = G$$

donc $u(F) \subset G$. Étant donnés les rôles symétriques de F et G, on aussi $u(G) \subset F$. Donc $\boxed{u \text{ est échangeur.}}$

11. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $x \in \operatorname{Ker} v^k$: $v^k(x) = 0$ et

$$v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0) = 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker} v^{k+1}$. Ainsi $\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$.

$$\boxed{\text{Donc la suite } (\operatorname{Ker} v^k)_{k \in \mathbf{N}} \text{ croît pour l'inclusion.}}$$

12. Pour $k \in \mathbf{N}$, posons $d_k = \dim \operatorname{Ker} v^k$. D'après ce qui précède, la suite d'entiers (d_k) croît. Mais bien-sûr, $\operatorname{Ker} v^k \subset E$ donc $d_k \leqslant \dim E$ et la suite (d_k) est majorée. Alors elle converge. Mais une suite d'entier qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang : il existe un rang p tel que pour tout $k \geqslant p$, $d_k = d_p$, ou encore

$$\boxed{\exists p \in \mathbf{N}, \forall k \geqslant p,\ \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p.}$$

Nommons $U = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k$ et prouvons que $\operatorname{Ker} v^p = U$ par double inclusion.

Par définition de la réunion, $\operatorname{Ker} v^p \subset U$.

Soit $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k$. Toujours par définition de la réunion, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $x \in \operatorname{Ker} v^k$. Si $k \geqslant p$, $\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p$ et $x \in \operatorname{Ker} v^p$. Si $k < p$, par croissance (pour l'inclusion) de la suite $(\operatorname{Ker} v^k)$, $\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^p$ et $x \in \operatorname{Ker} v^p$. Alors $U \subset \operatorname{Ker} v^p$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \operatorname{Ker} v^p = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k.}$$

Comme $2p \geqslant p$, $\operatorname{Ker} v^{2p} = \operatorname{Ker} v^p = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k$, donc le rang $2p$ convient aussi pour le travail précédent. $\boxed{\text{On peut donc supposer que } p \text{ est pair.}}$

13. On vient de le dire, $2p \geqslant p$ donc

$$\boxed{\operatorname{Ker} v^{2p} = \operatorname{Ker} v^p = E_\lambda^c(f).}$$

Soit $x \in E_\lambda^c(f) \cap \operatorname{Im} v^p$: $v^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = v^p(y)$. Alors $v^p(x) = v^{2p}(y) = 0$ et $y \in \operatorname{Ker} v^{2p} = \operatorname{Ker} v^p$ donc $x = v^p(y) = 0$. Ainsi, $E_\lambda^c(f) \cap \operatorname{Im} v^p = \{0\}$. Et d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \operatorname{Ker} v^p + \dim \operatorname{Im} v^p \\ &= \dim E_\lambda^c(f) + \dim \operatorname{Im} v^p \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p.}$$

Comme $v^p = (f - \lambda \mathrm{I}_E)^p$ est un polynôme en f, il commute avec f, donc les noyaux et images de l'un sont stables par l'autre : en particulier,

$$\boxed{E_\lambda^c(f) \text{ et } \operatorname{Im} v^p \text{ sont stables par } f.}$$

14. Notons $g = f\|_{\operatorname{Im} v^p}$ l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} v^p$ et $h = f\|_{E_\lambda^c(f)}$ l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.

Soit $x \in \operatorname{Im} v^p$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors $v(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} v$. Par ailleurs, il existe $y \in E$ tel que $x = v^p(y)$, donc $v(x) = v^{p+1}(y) = 0$ et $y \in \operatorname{Ker} v^{p+1} = \operatorname{Ker} v^p$, donc $x = v^p(y) = 0$. Cela signifie que f n'admet aucun vecteur propre pour la valeur propre λ dans $\operatorname{Im} v^p$, ou encore que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'endomorphisme } g \text{ induit par } f \text{ sur } \operatorname{Im} v^p \text{ n'admet} \\ \text{pas } \lambda \text{ comme valeur propre.}\end{array}}$$

Soit $x \in E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker} v^p$: on a $v^p(x) = 0$, c'est-à-dire $(f - \lambda \mathrm{I}_E)^p(x) = 0$. Autrement dit, l'endomorphisme $(f - \lambda \mathrm{I}_E)^p$ restreint à $E_\lambda^c(f)$ est nul. Cela signifie que le polynôme $(X - \lambda)^p$ est annulateur de l'endomorphisme h induit par f sur $E_\lambda^c(f)$. Alors les valeurs propres de h sont parmi les racines de ce polynôme : seul λ est possible.

Supposons que $E_\lambda^c(f) \neq \{0\}$. Alors v^p n'est pas injectif, donc v ne l'est pas non plus et $\operatorname{Ker} v \neq \{0\}$. Alors $\operatorname{Ker} v$ est l'espace propre de f associé à λ et comme $\operatorname{Ker} v \subset E_\lambda^c(f)$, cela entraine que h admet effectivement λ comme valeur propre.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } E_\lambda^c(f) \neq \{0\}, \text{ l'endomorphisme } h \text{ induit par } f \\ \text{sur } E_\lambda^c(f) \text{ admet } \lambda \text{ comme unique valeur propre.}\end{array}}$$

15. On suppose donc que $\operatorname{Sp} f = \{\lambda, \mu\}$. En s'inspirant de l'énoncé, posons $w = f - \mu \mathrm{I}_E$ et

$$E_\mu^c(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} w^k.$$

Reprenons les notations g et h de la question précédente. On a vu que $\lambda \notin \operatorname{Sp} g$. Mais le polynôme caractéristique χ_g de g est scindé sur $\mathbf{C}$, donc ses racines sont valeurs propres de g, donc de f : d'après l'hypothèse, il s'agit seulement de μ puisque λ est exclue. Ainsi, il existe un entier β tel que $\chi_g = (X - \mu)^\beta$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_g(g) = 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \operatorname{Im} v^p$, $(g - \mu \mathrm{I}_{\operatorname{Im} v^p})^\beta(x) = 0$, ou encore $(f - \mu \mathrm{I}_E)^\beta(x) = 0$, c'est-à-dire $w^\beta(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} w^\beta$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Im} v^p \subset \operatorname{Ker} w^\beta \subset E_\mu^c(f).}$$

Par ailleurs, soit $x \in E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f)$: $v^p(x) = 0$ et il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $w^q(x) = 0$. Comme h n'admet que λ comme valeur propre, $h - \mu\,\mathrm{I}_{E_\lambda^c(f)}$ est injectif donc $(h - \mu\,\mathrm{I}_{E_\lambda^c(f)})^q$ l'est aussi. Comme $0 = w^q(x) = (h - \mu\,\mathrm{I}_{E_\lambda^c(f)})^q(x)$, cela entraine que $x = 0$. Ainsi $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) = \{0\}$ et la somme $E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$ est directe.

Alors, on a

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p \subset E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f) \subset E,$$

donc les deux inclusions sont des égalités : en particulier, $\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f).}$

16. On a $u = a + b$ et $a^2 = b^2 = 0$ donc

$$\begin{aligned} u^2 &= a^2 + a\circ b + b\circ a + b^2 = a\circ b + b\circ a,\\ a\circ u^2 &= a^2\circ b + a\circ b\circ a = a\circ b\circ a,\\ u^2\circ a &= a\circ b\circ a + b\circ a^2 = a\circ b\circ a,\\ b\circ u^2 &= b\circ a\circ b + b^2\circ a = b\circ a\circ b,\\ u^2\circ b &= a\circ b^2 + b\circ a\circ b = b\circ a\circ b. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Où l'on voit bien que } a \text{ et } b \text{ commutent avec } u^2.}$

17. Comme p est pair, il s'écrit $p = 2\,q$, donc $u^p = (u^2)^q$. Comme a et b commutent avec u^2, et que u^p est un polynôme en u^2, a et b commutent avec u^p, donc $\boxed{G = \operatorname{Im} u^p \text{ est stable par } a \text{ et } b.}$

Ainsi, les endomorphismes induits $a_G = a\|_G$ et $b_G = b\|_G$ sont bien définis. De plus, pour tout $x \in G$,

$$a_G^2(x) = a^2(x) = 0 \text{ et } b_G^2(x) = b^2(x) = 0.$$

$\boxed{\text{Donc } a_G \text{ et } b_G \text{ sont de carré nul.}}$

18. Clairement G est stable par u, et l'on a $u_G = a_G + b_G$, en notant $u_G = u\|_G$. D'après la question 13, $E = E_0^c(u) \oplus \operatorname{Im} u^p$, et d'après la question 14, 0 n'est pas valeur propre de u_G. Cela signifie que u_G est injectif. Alors, u_G est dans le contexte de la partie C : u_G est un automorphisme de G tel que $u_G = a_G + b_G$ avec $a_G^2 = b_G^2$. D'après la question 10, u_G est échangeur : il existe donc deux sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 de G tels que $G = G_1 \oplus G_2$ et $u_G(G_1) \subset G_2$, $u_G(G_2) \subset G_1$.

Toujours d'après la question 14, 0 est l'unique valeur propre de l'endomorphisme $u_F = u\|_F$, en notant $F = E_0^c(u)$. Comme χ_{u_F} est scindé sur $\mathbf{C}$, il s'écrit donc $\chi_{u_F} = X^{\dim F}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_{u_F}(u_F) = u_F^{\dim F} = 0$. Ainsi, u_F est nilpotent. D'après le théorème admis de l'énoncé, u_F est donc échangeur : il existe deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de F tels que $F = F_1 \oplus F_2$ et $u_F(F_1) \subset F_2$, $u_F(F_2) \subset F_1$.

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &= (F_1 \oplus F_2) \oplus (G_1 \oplus G_2)\\ &= (F_1 \oplus G_1) \oplus (F_2 \oplus G_2) = E_1 \oplus E_2, \end{aligned}$$

en posant $E_1 = F_1 \oplus G_1$ et $E_2 = F_2 \oplus G_2$.

Et l'on a $u(E_1) \subset E_2$. En effet, pour $x_1 \in E_1$, il existe $(y_1, z_1) \in F_1 \times G_1$ tel que $x_1 = y_1 + z_1$, donc

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u(y_1) + u(z_1)\\ &= \underbrace{u_F(y_1)}_{\in F_2} + \underbrace{u_G(z_1)}_{\in G_2} \in F_2 \oplus G_2 = E_2. \end{aligned}$$

De même, $u(E_2) \subset u(E_1)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } u \text{ est échangeur.}}$

19. Par définition de φ, $\varphi \circ u = -u \circ \varphi$. Alors,

$$\begin{aligned} \boxed{\varphi^2 \circ u} &= \varphi \circ (\varphi \circ u) = \varphi \circ (-u \circ \varphi) = -\varphi \circ u \circ \varphi\\ &= -(-u \circ \varphi) \circ \varphi \boxed{= u \circ \varphi^2.} \end{aligned}$$

20. Posons momentanément $f = \varphi^2$. Comme χ_f est scindé sur $\mathbf{C}$, f admet au moins une valeur propre. Soit λ un valeur propre de f.

D'après la question 13, $E = F \oplus G$, en notant $F = E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker} v^p$ et $G = \operatorname{Im} v^p$, avec $v = f - \lambda\,\mathrm{I}_E$ et pour un certain p pair.

D'après la question 19, u commute avec f (c'est-à-dire φ^2), donc u commute avec v qui est un polynôme en f, donc aussi avec v^p. Alors, F et G sont stables par u, qui induit donc deux endomorphismes u_F et u_G de F et G respectivement.

De même, φ commute avec f, qui est un polynôme en φ, donc pour les mêmes raisons que ci-dessus, F et G sont stables par φ, qui y induit deux endomorphismes φ_F et φ_G.

Comme $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$, en restreignant respectivement à F et G, on a

$$\begin{aligned} -u_F &= \varphi_F \circ u_F \circ \varphi_F^{-1},\\ -u_G &= \varphi_G \circ u_G \circ \varphi_G^{-1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Mais u est indécomposable, donc cela n'est possible que si F ou G est nul. Comme $\lambda \in \operatorname{Sp} f$, $E_\lambda(f) \neq \{0\}$; or $E_\lambda(f) \subset E_\lambda^c(f)$, donc $F \neq \{0\}$. Alors $G = \{0\}$. Autrement dit, $\operatorname{Im} v^p = \{0\}$, donc $v^p = 0$, ou encore $(f - \lambda\,\mathrm{I}_E)^p = 0$. Donc le polynôme $(X - \lambda)^p$ est annulateur de f et les valeurs propres de f sont parmi ses racines. Il s'ensuit que λ est la seule valeur propre possible de f.

$\boxed{\text{Finalement, } \varphi^2 \text{ n'a qu'une seule valeur propre, disons } \lambda.}$

Puisque φ est un automorphisme, φ^2 l'est aussi et $\lambda \neq 0$. En notant α et $-\alpha$ ses deux racines carrées, on a donc

$$\begin{aligned} 0 = (\varphi^2 - \lambda\,\mathrm{I}_E)^p &= (\varphi^2 - \alpha^2\,\mathrm{I}_E)^p\\ &= ((\varphi - \alpha\,\mathrm{I}_E)\,(\varphi + \alpha\,\mathrm{I}_E))^p. \end{aligned}$$

Donc le polynôme $((X - \alpha)\,(X + \alpha))^p$ est annulateur de φ, donc $\boxed{\operatorname{Sp}(\varphi) \subset \{\alpha, -\alpha\}.}$

21. D'après la question 15, puisque les deux valeurs propres possibles de φ sont α et $-\alpha$, on a

$$E = E^c_\alpha(\varphi) \oplus E^c_{-\alpha}(\varphi).$$

Voyons si u échange ces deux espaces.

On sait qu'il existe deux entiers p et q tels que

$$E^c_\alpha(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^p \text{ et } E^c_{-\alpha}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^q.$$

D'après la question 12, en choisissant $r = \max(p, q)$, on peut écrire

$$E^c_\alpha(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^r \text{ et } E^c_{-\alpha}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^r.$$

Soit $x \in E^c_\alpha(\varphi)$: $(\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^r(x) = 0$. Montrons que $u(x) \in E^c_{-\alpha}(\varphi)$, c'est-à-dire que $(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^r(u(x)) = 0$. On sait que $\varphi \circ u = -u \circ \varphi$, donc

$$\begin{aligned}(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E) \circ u = \varphi \circ u + \alpha u &= -u \circ \varphi + \alpha u \\ &= -u \circ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E).\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on en tire que

$$(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^r \circ u = (-1)^r u \circ (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^r.$$

Donc

$$(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^r(u(x)) = (-1)^r u((\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^r(x)) = 0.$$

D'où $u(x) \in E^c_{-\alpha}(\varphi)$. Ainsi, $u(E^c_\alpha(\varphi)) \subset E^c_{-\alpha}(\varphi)$. Par symétrie des rôles joués par α et $-\alpha$, on a également $u(E^c_{-\alpha}(\varphi)) \subset E^c_\alpha(\varphi)$.

Donc u est échangeur.

22. Raisonnons par récurrence sur la dimension de E. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit la proposition

$P(n)$: pour tout endomorphisme d'un espace de dimension inférieure ou égale à n, la condition **(C3)** entraine la condition **(C1)**.

Initialisation. Considérons un endomorphisme u d'une droite vectorielle E. Alors u est une homothétie : il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$. Si l'on suppose que u vérifie la condition **(C3)**, il existe un automorphisme φ de E tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}-u(x) = -\lambda x &= \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}(x) \\ &= \varphi(u(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(\lambda \varphi^{-1}(x)) \\ &= \lambda \varphi(\varphi^{-1}(x)) = \lambda x.\end{aligned}$$

Donc $\lambda = 0$. Alors, en écrivant $E = E \oplus \{0\}$, on voit bien que $u(E) \subset \{0\}$ et $u(\{0\}) = \{0\} \subset E$. Donc u est échangeur.

La propriété $P(1)$ est acquise.

Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$.

Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension inférieure ou égale à $n+1$, vérifiant la condition **(C3)**.

Si u est indécomposable, d'après la question 21, il est échangeur.

Sinon, il est possible d'écrire $E = F \oplus G$ avec $\dim F \geqslant 1$ et $\dim G \geqslant 1$, tels que F et G sont stables par u, et les endomorphismes induits u_F et u_G vérifient tous deux la propriétés **(C3)**.

Comme $\dim E \leqslant n+1$, $\dim F \in [\![1, n]\!]$ et $\dim G \in [\![1, n]\!]$, donc il est possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence $P(n)$: les endomorphismes u_F et u_G sont tous deux échangeurs. Avec la même manipulation qu'à la question 18, on en déduit que u est échangeur.

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie, et l'hérédité est validée.

D'après le principe de récurrence, on en tire que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, ce que l'on voulait.