Septième devoir surveillé

Premier exercice

[E3A18]

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad f_n = h_n - \ln(n).$$

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $u_1 = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Q1. Rappeler le domaine de définition de la fonction ($x \mapsto x + \ln(1 - x)$). Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

Q2. Soit n un entier naturel. Quel est le signe de u_n ?

Q3. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

Q4. Étudier la fonction ($f : x \mapsto x - \ln(1 + x)$) sur $[0, 1]$.

Q5. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

Q6. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n , $v_n - u_n$.

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^N (v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.

Q7. Que peut-on dire des suites

$$\left(\sum_{n=1}^N v_n \right)_{N \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=1}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}^*} \quad ?$$

Justifier que

$$\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} u_n.$$

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Q8. Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0, 1[$.

Q9. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n).$$

Q10. Justifier que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q11. Démontre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ .

Indication : exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n) .

Deuxième exercice

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

[d'après CCINP20]

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $g :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad g(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit aussi la fonction $u :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \\ u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

Q12. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q13. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Q14. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t) e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt.$$

Partie II - Calcul de f sur $]0, +\infty[$

Q15. Montrer que $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Q16. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction f est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad f'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

Q17. En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0, 1], f_1(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$$

$$\text{et } f_2(x) = \int_1^{+\infty} g(x, t) dt.$$

Q18. Montrer que la fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$.

Q19. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$f_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt.$$

Q20. Montrer que la fonction f_2 est continue sur $[0, 1]$.

Q21. En déduire que la fonction f est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I .

Troisième exercice

[d'après CCINP23]

Dans tout l'exercice, α est un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q22. Démontrer que $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Q23. Démontrer que $J(\alpha) = I(1 - \alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q24. Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1}.$$

Q25. Déterminer une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Indication : pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, on pourra décomposer

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = x^{\alpha-1} \frac{1 - (-x)^{n+1} + (-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Q26. En déduire que

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],$$

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(n x)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Q27. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha \pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\text{et } \forall x \in [0, +\infty[, f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt.$$

Q28. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q29. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Q30. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q31. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$.

Q32. Démontrer que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q33. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

Q34. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x).$$

Q35. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Q36. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha \pi)}.$$

Q37. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$