Huitième devoir surveillé

Variations autour de la formule de Stirling

Premier problème

[d'après MP17]

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k\,x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k\,x^k}{k!}.$$

Q 1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

Q 2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\,e^{-u})^n\,\mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\,y^n.$$

Q 3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Q 4. On suppose dans cette question que $x \in \,]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\,e^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = \mathrm{o}(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

Q 5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

Q 6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n\,\mathrm{d}u.$$

Q 7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = \mathrm{o}(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra l'écrire $(u\,e^{-u})^n \leqslant (x\,e^{-x})^{n-1}\,u\,e^{-u}$ pour $u \geqslant x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in \,]-1,1[\setminus \{0\} \quad 0 < f(x) < 1$

H4 : Les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $x \in \,]-1,1[\setminus \{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\,\ln(f(x)).$$

Q 8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

Q 9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait

$$f(x) \leqslant e^{-a x^2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

On définit une fonction $g : [1,+\infty[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$g(a,u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{a}}\right)\right)^a & \text{si } u \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 10. Montrer que pour tout réel $a \geqslant 1$, la fonction $u \mapsto g(a,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, et que pour tout $u \in \mathbf{R}$, la fonction $a \mapsto g(a,u)$ converge quand a tend vers $+\infty$ vers la limite

$$\ell(u) = e^{-u^2/2}.$$

Q 11. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} (f(x))^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_0^1 (f(x))^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

Q 12. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1}\,e^{-n}\,(I_n + J_n),$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Q 13. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x+1 \leqslant 2^x$. En déduire une majoration de J_n.

Q 14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

Q 15. En déduire que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

IV Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

Q 16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,e^{nt}\,\mathrm{d}t.$$

Q 17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,e^n.$$

Second problème

[d'après CS23]

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 18. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 19. Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 20. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 21. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Q 22. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -2\,g'(x)\,g(x).$$

Q 23. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 24. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 25. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

Q 26. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

Q 27. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

Pour $\alpha \in [1, +\infty[$, on note $\mathbf{1}_{[-\sqrt{\alpha},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{\alpha}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{\alpha}, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, -\sqrt{\alpha}[$. On pose pour $y \in \mathbf{R}$,

$$h(\alpha, y) = \mathbf{1}_{[-\sqrt{\alpha},+\infty[}(y)\left(1 + \frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^\alpha \mathrm{e}^{-y\sqrt{\alpha}}.$$

Q 28. Démontrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $\alpha \mapsto h(\alpha, y)$ converge quand $\alpha \to +\infty$ et préciser

$$\lim_{\alpha \to +\infty} h(\alpha, y).$$

Pour $x \in \,]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on pose

$$q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Q 29. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q.

Q 30. Démontrer que, pour tout $x > -1$,

$$q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u.$$

Q 31. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $\alpha \in [1, +\infty[$,

$$\forall y \in \mathbf{R}^+, \quad h(\alpha, y) \leqslant (1+y)\,\mathrm{e}^{-y}$$
$$\forall y \in \mathbf{R}^{-*}, \quad h(\alpha, y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Q 32. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}, \; v_n = \ln(u_n), \; w_n = v_{n+1} - v_n.$$

Q 33. Vérifier que

$$w_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 34. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \; (1-\varepsilon)\,b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)\,b_n.$$

Q 35. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k.$$

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Q 36. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, établir que

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Q 37. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$.

II.C.3)

Q 38. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

Q 39. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \; n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{q_n}{n}\right).$$