

Corrigé du neuvième devoir surveillé

Problème 1

I.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I.1.a. Par opérations usuelles, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f'_n(t) = \frac{e^{-t} t^{n-1}}{n!} (n - t).$$

On en tire facilement le tableau de variation suivant :

t	0	n	$+\infty$
$f'_n(t)$		+	0
$f_n(t)$		+	0
	0	$\nearrow f_n(n)$	$\searrow 0$

Bien-sûr, $f_n(0) = 0$ et par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$. Ainsi, f_n est maximale en n , et son

maximum vaut $\left| f_n(n) = \frac{e^{-n} n^n}{n!} \right|$.

I.1.b. Grâce à la formule de Stirling, en l'infini,

$$\left| f_n(n) \sim \frac{e^{-n} n^n}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \right|.$$

I.1.c. Ainsi, f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\|f_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = f_n(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela signifie que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f .

I.2. Voir l'exemple développé dans le cours.

I.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

I.3.a. Oui, grâce à la question I.2.e.

I.3.b. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x f_n(t) dt$ est son unique primitive nulle en 0. Comme telle, cette primitive est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors, par opérations usuelles,

$$\left| H_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } H'_n = -f_n \right|.$$

I.3.c. Comme H_n est continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} H_n(x) = H_n(0) = 1 \right|.$$

D'après les questions I.2.d et I.2.e,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1,$$

donc avec la question I.3.a,

$$\left| \lim_{x \rightarrow +\infty} H_n(x) = 0 \right|.$$

I.3.d. On a vu à la question I.1.c que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$, donc aussi sur le segment $[0, x]$. Comme les f_n sont clairement continues sur ce segment, on peut permuter la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x f(t) dt = 0.$$

Alors,

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x) = 1 \right|.$$

I.4.a. Comme f_n admet un maximum en n ,

le graphe de f_1 est $\mathcal{C}_a$ et celui de f_5 est $\mathcal{C}_c$.

I.4.b. Sur le même principe, les courbes $\mathcal{C}_\ell$, pour $\ell \in \{a, b, c, d, e\}$, représentent respectivement les fonctions f_i , pour $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Pour chacune, l'allure suit bien le tableau de variation. Enfin, on voit que les maximums décroissent et semblent tendre vers 0, ce qui traduit la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction nulle. Naturellement, cette lecture est largement influencée par ce que l'on a prouvé avant.

I.5.a. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Grâce au développement en série entière usuel de l'exponentielle, on sait que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = 1.$$

I.5.b. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in [0, a]$ et $n \in \mathbb{N}$. Dès que $n \geq [a] + 1$, $a \leq n$ donc d'après le tableau de la question I.1.a, f_n croît sur $[0, a]$. Alors,

$$\|f_n\|_{\infty}^{[0, a]} = f_n(a).$$

Et avec la question I.5.a, $\sum f_n(a)$ converge, donc $\sum \|f_n\|_{\infty}^{[0, a]}$ converge.

Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, a]$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

I.5.c. En revanche, avec les questions I.1.a et I.1.b,

$$\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = f_n(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Or, la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge, donc $\sum \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+}$ diverge.

La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

II. Dans toute la partie II de ce problème 1, $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1.a. Par récurrence, montrons que $\lfloor S_n \sim \mathcal{P}(n) \rfloor$.

L'initialisation est évidente puisque $S_1 = X_1$.

Supposons que ce soit vrai pour un rang n . On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Grâce au lemme des coalitions que l'énoncé rappelle, S_n et X_{n+1} sont indépendantes donc d'après le cours, comme $S_n \sim \mathcal{P}(n)$ et $X_{n+1} \sim \mathcal{P}(1)$, $S_{n+1} \sim \mathcal{P}(n+1)$. La transmission est acquise.

Alors par récurrence, la propriété est démontrée.

De plus, $\lfloor \mathbf{E}(S_n) = \mathbf{V}(S_n) = n \rfloor$.

II.1.b. D'après les propriétés de calcul de l'espérance et de la variance,

$$\lfloor \mathbf{E}(S_n^*) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{E}(S_n - n) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbf{E}(S_n) - n) = 0 \rfloor,$$

$$\lfloor \mathbf{V}(S_n^*) = \frac{1}{(\sqrt{n})^2} \mathbf{V}(S_n - n) = \frac{1}{n} \mathbf{V}(S_n) = 1 \rfloor.$$

Commentaire. Ainsi, S_n^* est une variable aléatoire réelle réduite centrée.

II.1.c. En raisonnant sur les événements,

$$\begin{aligned} (S_n^* \leq 0) &= \left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0 \right) = (S_n - n \leq 0) \\ &= (S_n \leq n) = \bigsqcup_{k=0}^n (S_n = k). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lfloor \mathbf{P}(S_n^* \leq 0) \rfloor &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!} \\ &= e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}. \end{aligned}$$

II.2. Il s'agit d'utiliser cette formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle sur le segment $[0, n]$ à l'ordre n : sachant que l'exponentielle est sa propre dérivée, et qu'elle vaut 1 en 0, on a directement

$$\begin{aligned} \lfloor e^n \rfloor &= \sum_{k=0}^n 1 \cdot \frac{(n-0)^k}{k!} + \int_0^n e^t \frac{(n-t)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^n e^{n-t} \frac{t^n}{n!} dt, \end{aligned}$$

où l'on a changé t en $n-t$ dans l'intégrale.

II.3.a. En divisant par e^n , on a donc

$$1 = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt$$

d'où, en utilisant successivement la question II.1.c, ce résultat et la question I.3.a,

$$\begin{aligned} \lfloor \mathbf{P}(S_n^* \leq 0) \rfloor &= e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = 1 - \int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt \\ &= H_n(n). \end{aligned}$$

II.3.b. Pour commencer, faisons une intégration par parties : elle est permise car toutes les fonctions manipulées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, x]$.

$$\begin{aligned} H_n(x) &= 1 - \int_0^x \frac{e^{-t} t^n}{n!} dt \\ &= 1 - \left[\frac{e^{-t} t^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-t} t^{n+1}}{(n+1)!} dt \\ &= H_{n+1}(x) - \frac{e^{-x} x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lfloor \mathbf{P}(S_n^* \leq 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leq 0) \rfloor &= H_n(n) - H_{n+1}(n+1) \\ &= H_{n+1}(n) - \frac{e^{-n} n^{n+1}}{(n+1)!} - H_{n+1}(n+1) \\ &= 1 - \int_0^n e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - \frac{e^{-n} n^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\quad - \left(1 - \int_0^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt \right) \\ &= \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

II.3.c. D'après la question I.1.a, la fonction

$$f_{n+1} : t \mapsto e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

croît sur $[n, n+1]$ donc elle y est minorée par sa valeur en n . Ainsi, en minorant l'intégrale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n^* \leq 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leq 0) &= \int_n^{n+1} f_{n+1}(t) dt - f_{n+1}(n) \\ &\geq \int_n^{n+1} f_{n+1}(n) dt - f_{n+1}(n) \\ &= f_{n+1}(n) - f_{n+1}(n) = 0. \end{aligned}$$

Cela signifie que $\lfloor \mathbf{P}(S_n^* \leq 0) \rfloor_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît.

Et comme elle est dans $[0, 1]$, elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

La limite 1 est exclue car la suite décroît et

$$\mathbf{P}(S_1^* \leq 0) = H_1(1) = 1 - \underbrace{\int_0^1 f_1(t) dt}_{> 0} < 1.$$

II.3.d. Je ne vois pas trop ce que l'énoncé attend. Voici néanmoins deux démarches possibles.

MÉTHODE PROBABILISTE. On approche ℓ par $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0)$, pour n « grand ». Pour cela, on simule un tirage aléatoire de S_n^* ; on compte le nombre d'occurrences négatives, que l'on divise par le nombre de tirages ; et l'on a une approximation de $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0)$, donc de ℓ . Cette démarche a l'avantage de la simplicité de mise en œuvre, mais présente l'inconvénient de la simulation du hasard.

MÉTHODE NUMÉRIQUE. On approche ℓ par

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

Ici, on s'affranchit de la simulation du hasard, mais l'on manie des puissances et des factorielles qui augmentent avec n .

ERREUR DE MÉTHODE. Dans les deux démarches, il faudrait de toute façon majorer proprement l'erreur commise, ce qui dépasse le cadre du devoir.

II.4.a. D'après la question II.1.a, on sait que $S_n \sim \mathcal{P}(n)$, donc d'après le cours,

$$\left| \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \mathbf{G}_{S_n}(t) = e^{n(t-1)}. \right|$$

II.4.b. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(S_n = k) t^{(k-n)/\sqrt{n}}.$$

converge absolument. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(S_n = k) t^{(k-n)/\sqrt{n}} = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} \mathbf{P}(S_n = k) (t^{1/\sqrt{n}})^k.$$

Or, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(S_n = k) x^k$ est $+\infty$, donc pour tout $t > 0$, $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(S_n = k) (t^{1/\sqrt{n}})^k$ converge absolument. Alors

$$\left| \begin{array}{l} t^{S_n^*} \text{ admet une espérance et} \\ \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}. \end{array} \right|$$

II.4.c. Soit $t > 0$ fixé. On a

$$\frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} \exp\left(n(t^{1/\sqrt{n}} - 1)\right).$$

Par ailleurs, quand n est grand,

$$t^{1/\sqrt{n}} - 1 = e^{\ln t / \sqrt{n}} - 1 = \frac{\ln t}{\sqrt{n}} - \frac{\ln^2 t}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}} &= \exp(-(\ln t) \sqrt{n}) \\ &\quad \times \exp\left(n\left(\frac{\ln t}{\sqrt{n}} - \frac{\ln^2 t}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\ln^2 t}{2} + o(1)\right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = e^{-\frac{1}{2} \ln^2 t}. \right|$$

Problème 2

1. Les deux matrices de $\mathcal{B}_2$ suivantes conviennent :

$$\left| A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \text{ et } A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}_2. \right|$$

2. Clairement, $\left| A_3 \in \mathcal{B}_3. \right|$

$$A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 3I_3 \text{ donc } \left| A_3 \notin \mathcal{H}_3. \right|$$

Enfin, $\det(A_3) = 4$, donc $\left| A_3 \in \mathcal{G}_3. \right|$

3.a. Bien-sûr, $A_4 \in \mathcal{B}_4$. De plus, sans difficulté, $A_4^T A_4 = 4I_4$ donc $\left| A_4 \in \mathcal{H}_4. \right|$

3.b. Comme $A_4^T = A_4$, on a $S^2 = \frac{1}{4} A_4^2 = I_4$ donc $\left| \varphi \text{ est une symétrie.} \right|$

Et comme $S \notin \{I_4, -I_4\}$, $\left| \text{Sp } S = \{-1, 1\}. \right|$

3.c. $\left| A_4 \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable.} \right|$

De plus, $A_4 = 2S$ et $\text{Sp } S = \{-1, 1\}$ donc

$$\left| \text{Sp}(A_4) = \{-2, 2\}. \right|$$

En effet, si P est un polynôme et M une matrice carrée, $\text{Sp}(P(M)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(M)\}$.

3.d. On pourrait diagonaliser directement A_4 et orthonormaliser une base de vecteurs propres avec le procédé de Gram-Schmidt.

Commentaire. Je ne vois pas trop ce que l'énoncé attend de plus.

4. Par définition, $\left| \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n. \right|$

Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Par définition, $A \in \mathcal{B}_n$. De plus, $\det(A^T A) = \det(n I_n)$, d'où $\det(A)^2 = n^n$ et $\det(A) \neq 0$, donc $A \in \mathcal{G}_n$. Ainsi, $\left| \mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n. \right|$

Enfin, les n^2 coefficients d'une matrice de $\mathcal{B}_n$ valent ± 1 , donc $\left| \text{card}(\mathcal{B}_n) = 2^{(n^2)}. \right|$

5.* Soit $A \in \mathcal{B}_n$.

Supposons i) vraie, donc que $A^T A = n I_n$. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$(A^T A)_{i,j} = C_i(A)^T C_j(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ n & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc $\langle C_i(A), C_j(A) \rangle = 0$ si $i \neq j$. Cela signifie que la famille $(C_j(A))_{1 \leq j \leq n}$ est orthogonale et ii) est vraie.

Supposons que ii) est vraie. Sur le même principe de calcul que ci-dessus, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i \neq j$,

$$(A^T A)_{i,j} = C_i(A)^T C_j(A) = \langle C_i(A), C_j(A) \rangle = 0.$$

Et si $i = j$,

$$(A^T A)_{i,i} = C_i(A)^T C_i(A) = \sum_{k=1}^n (A_{k,i})^2 = n,$$

car $A_{k,i} = \pm 1$. Alors, $A^T A = n I_n$, et en passant i) est vraie, mais aussi,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} A \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{n}} A \right) = I_n$$

et $\frac{1}{\sqrt{n}} A$ est orthogonale, donc iii) est vraie.

Enfin, si iii) est vraie, on vient de voir que i) l'est.

Ainsi, pour une matrice de $\mathcal{B}_n$, les trois propriétés sont équivalentes.

6.a. Soit $A \in \mathcal{G}_n$. D'après les opérations permises dans un déterminant, $\det(A') = A_{1,1}^{n-1} \det(A)$.

6.b. Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. D'après les opérations menant à A' , on a

$$A'_{i,1} = A_{1,1} A_{i,1} - A_{i,1} A_{1,1} = 0.$$

Et si $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$A'_{i,j} = A_{1,1} A_{i,j} - A_{i,1} A_{1,j} \in \{-2, 0, 2\},$$

car tous les coefficients de A valent ± 1 .

Ainsi, A' a bien la forme annoncée. En particulier, B' est bien inversible car A l'est, donc A' l'est aussi puisque $A_{1,1} \neq 0$.

6.c. Alors,

$$\det(A) = \frac{\det(A')}{A_{1,1}^{n-1}} = \frac{A_{1,1} \det(B')}{A_{1,1}^{n-1}} = A_{1,1} \det(B'),$$

car $A_{1,1} = \pm 1$ et parce que A' est triangulaire par blocs. Or, dans chaque ligne de B' , on peut factoriser par 2 : ainsi,

$$\det(A) = A_{1,1}^n 2^{n-1} \det(B'')$$

où B'' est la matrice B' dans laquelle tous les coefficients sont divisés par 2. En particulier, ils valent -1 , 0 ou 1, donc $\det(B'')$ est entier, d'après l'énoncé.

Donc $\det(A)$ est multiple de 2^{n-1} .

6.d. Comme $A \in \mathcal{H}_n$, on a vu à la question 4 que $\det(A)^2 = n^n$, donc $|\det(A)| = n^{n/2}$.

D'après la question précédente, il existe donc un entier non nul p tel que $n^{n/2} = p 2^{n-1}$, ou encore $n^n = p^2 2^{2(n-1)}$. Comme $n \geq 3$, $n-1 \geq 2$, donc $p^2 2^{2(n-1)}$ est pair, donc n^n l'est et n l'est aussi. Écrivons $n = 2k$ avec $k \geq 2$, car $n \geq 3$. Alors $(2k)^{2k} = p^2 2^{4k-2}$, d'où $k^{2k} = p^2 2^{2k-2}$. Comme $k \geq 2$, cet entier est encore pair, donc k^{2k} l'est et k l'est.

Alors, n est multiple de 4.

7.a. Clairement, τ_r est linéaire et $\tau_r^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^r}$, donc

τ_r est un automorphisme de $\mathbb{R}^r$.

7.b. Sans difficulté, en écrivant par blocs,

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{r-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

7.c. Dans la matrice $2T_r$ ne figurent que des 0 et des 2. Les opérations proposées transforment les 0 de A en des 1, et les 2 en des -1 . Donc $A' \in \mathcal{B}_n$.

Ensuite, comme T_r est inversible, A l'est et

$$\det(A') = (-1)^{n-1} \det(A) \neq 0,$$

donc A' est aussi inversible. Donc $A' \in \mathcal{G}_n$.

8. En appliquant cette construction pour $n = 6$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bien-sûr, $A \in \mathcal{G}_6$, d'après la question précédente, et $A \notin \mathcal{H}_6$ car 6 n'est pas multiple de 4 et $\mathcal{H}_6 = \emptyset$ d'après la question 6.d.

9.a. Soient $A \in \mathcal{B}_n$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Il existe donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

non nulle telle que $AX = \lambda X$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la coordonnée i de cette égalité matricielle donne

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j = \lambda x_i,$$

et i) est vérifiée. De plus, l'ensemble $\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ est non vide donc il admet un plus grand élément : notons-le $|x_k|$. Par construction, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_j| \leq |x_k|$. Et comme $X \neq 0$, $x_k \neq 0$, sinon tous les autres seraient nuls aussi, et X le serait. Alors ii) est vérifiée.

9.b. En écrivant la relation i) pour $i = k$, on a

$$\sum_{j=1}^n A_{k,j} x_j = \lambda x_k.$$

Alors, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |\lambda x_k| &= \left| \sum_{j=1}^n A_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |A_{k,j}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_k| = n |x_k|. \end{aligned}$$

En simplifiant par x_k qui n'est pas nul, $|\lambda| \leq n$.

9.c. Grâce à cette majoration, l'ensemble de l'énoncé est majoré, donc il admet bien une borne supérieure. Pour la déterminer, il suffit d'exhiber une matrice de $\mathcal{B}_n$ qui admet n comme valeur propre. Dans ce cas, la borne supérieure sera atteinte et sera un maximum.

La matrice qui ne contient que des 1 est bien dans $\mathcal{B}_n$ et elle admet clairement n comme valeur propre, associée au vecteur propre qui lui aussi ne contient que des 1.

La borne supérieure considérée vaut bien n .