Corrigés des exercices de la première feuille

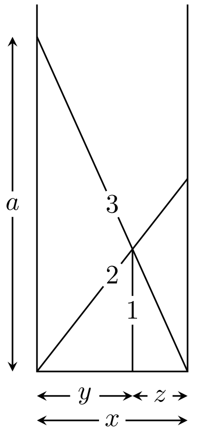
1

D'une part, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{b} \text{ et } \frac{z}{1} = \frac{x}{a},$$

et comme $x = y + z$ et $x \neq 0$,

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$



D'autre part, d'après le théorème de Pythagore,

$$a = \sqrt{9 - x^2},$$
$$b = \sqrt{4 - x^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = 1.$$

En introduisant la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - 1$$

et en faisant une dichotomie sur le segment $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (voir ci-dessous), on trouve

$$x = 1{,}231 \text{ m} \pm 0{,}5 \text{ mm}.$$

```
from math import sqrt

def f(x):
    return 1/sqrt(9 - x**2) \
           + 1/sqrt(4 - x**2) - 1

a, b = 0.5, 1.5
eps = 0.0005
while b - a > eps:
    m = (a + b) / 2
    if f(m) * f(b) > 0:
        b = m
    else:
        a = m

print('La solution est comprise\n \
       entre', a, '\net', b)
```

2

1. Posons $N = 2\,024!$ et nommons n le nombre de chiffres de son écriture décimale, avec $n \geqslant 1$. Alors $10^{n-1} \leqslant N < 10^n$, d'où $n - 1 \leqslant \log(N) < n$ et

$$n = \lfloor \log(N) \rfloor + 1.$$

Par ailleurs,

$$\log(N) = \log\left(\prod_{i=1}^{2\,024} i\right) = \sum_{k=1}^{2\,024} \log(i).$$

En évaluant cette somme avec Python, par exemple, on obtient

$$n = 5\,815.$$

Commentaire. Bien-sûr, log désigne le logarithme décimal. Et voici une (ou presque) ligne de Python pour évaluer la somme.

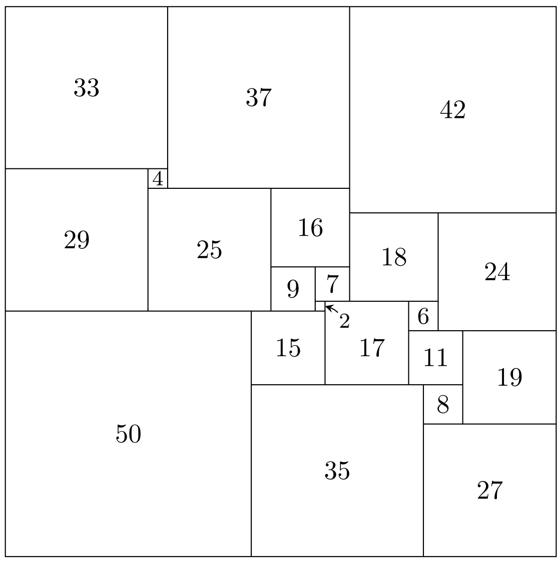
```
from math import log10
int(sum([log10(i) for i in range(2,2025)]))+1
```

2. Pour trouver le nombre de zéros dans l'écriture décimale de $2\,024!$, il faut compter le nombre de fois que N est divisible par 10, c'est-à-dire trouver l'entier p tel que $N = 10^p q$, où q est un entier non multiple de 10. Comme $10 = 2 \cdot 5$, cela revient à trouver p tel que $N = 5^p m$, où m n'est pas multiple de 5 : en effet, il y a plus de multiples de 2 que de multiples de 5 entre 1 et $2\,024$. Il s'agit donc de compter tous les multiples de 5 et des puissances de 5 parmi les entiers de 1 à $2\,024$. Comme $2\,024 = 5 \cdot 404 + 4$, il y a exactement 404 multiples de 5 plus petits que $2\,024$. Parmi eux, certains sont en fait multiples de $25 = 5^2$: $2\,024 = 25 \cdot 80 + 24$, donc il y en a 80. De même, $2\,024 = 5^3 \cdot 16 + 24$ et $2\,024 = 5^4 \cdot 3 + 149$, donc il y a 16 multiples de 125 et trois multiples de 625. En additionnant tous ces nombres, on compte une fois les multiples de 5, deux fois les multiples de 25, trois fois ceux de 125 et quatre fois ceux de 625, donc on compte exactement toutes les fois qu'un 5 divise N Ainsi, le nombre de zéros cherché est

$$\left\lfloor \frac{2\,024}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\,024}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\,024}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\,024}{5^4} \right\rfloor$$
$$= 404 + 80 + 16 + 3 = 503.$$

3

Oui, il y a une unique solution (à déplacement près). C'est le carré de côté 112 suivant :



Découvert en 1978 par Duijvestijn, ce carré est celui dont le côté est le plus petit, parmi tous les carrés que l'on peut découper en carrés plus petits et tous distincts.

4

Si $n = 0$ ou $n = 1$, c'est une évidence.

Si $n = 2$, le triplet $(3, 4, 5)$ convient. On parle de *triplet pythagoricien* et l'on sait tous les trouver.

Si $n \geqslant 3$, l'équation n'admet que les solutions triviales où $xy = 0$. C'est le théorème de Fermat-Wiles, énoncé par Pierre de Fermat en 1642 et démontré par Andrew Wiles en 1995, comme conséquence d'un énoncé plus général.

5

Nommons a et b ces deux nombres. On a

$$\begin{aligned} &16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} \\ &= 5 + 11 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{5}\sqrt{11 - 2\sqrt{29}} \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}})^2 \end{aligned}$$

donc $a = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{5} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}}$.
Or $(11 + 2\sqrt{29})(11 - 2\sqrt{29}) = 5$
et $(\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}})^2 = 22 + 2\sqrt{5}$,
donc $a = b$.

6

Oui, par exemple $2^{1\,074} \approx 2\,024 \cdot 10^{320}$.

Je ne sais pas prouver qu'une telle puissance existe pour une année (ou même un entier) arbitraire, mais voici un programme qui permet de trouver la réponse ci-dessus.

```
annee = input('Entrer l\'année : ')
max = int(input('Entrer la plus grande \
    puissance de 2 à tester : '))

u = 1
for k in range(1, max + 1) :
    u *= 2
    v = str(u)
    if v[:4] == annee :
        print('2^' + str(k), '=', annee
            + ' 10^' + str(len(v) - 4),
            '=', v)
        break
if k == max :
    print('Il n \'y a pas de solution \
           inférieure à 2^' + str(max))
```

7

Bien-sûr, $b = 0$ convient. L'intérêt est de trouver un b non nul, s'il existe.

Cherchons donc le plus petit entier $b > 0$ tel que $a = \sqrt{1\,141 b^2 + 1}$ soit entier. Autrement dit, cherchons deux entiers a et b, les plus petits possibles, tels que $a^2 - 1\,141 b^2 = 1$.

Cette équation fait partie des équations dites de Pell-Fermat. La théorie, assez complexe, permet de trouver que $b = 30\,693\,385\,322\,765\,657\,197\,397\,208$.

8

Non, mais il vaut environ $163 + 2 \cdot 10^{-29}$. Cette expression remarquable est due à Ramanujan.

Voici un moyen de le vérifier avec Python. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer des calculs en multi-précision, c'est-à-dire avec davantage que les 16 décimales usuelles de Python. Voici un exemple avec le module `mpmath`.

```
>>> import mpmath as mp
>>> mp.mp.dps = 35
>>> a = (mp.log(640320**3 + 744)/mp.pi)**2
>>> print(a)
163.00000000000000000000000000002322
>>> print(a - 163)
2.3216700293599250761419202902272782e-29
```

9

La conjecture des nombres premiers jumeaux affirme qu'il en existe une infinité, mais elle n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle. Une avancée majeure dans cette voie est due à Yitang Zhang (2013) : il existe une infinité de nombres premiers p tels que parmi les entiers entre $p + 1$ et $p + 7 \cdot 10^7$, il y a au moins un nombre premier. Le meilleur résultat actuel, à ma connaissance, remplace $7 \cdot 10^7$ par 246, voire 6 en admettant une autre conjecture (2014, travail collectif dans Polymath8).

10

Pour la définition du nombre de Graham G, voir le bonus « Grands nombres » sur le site. Il s'agit de déterminer G [10], ou encore le reste de la division euclidienne de G par 10.

Par définition, le nombre de Graham est de la forme $G = 3^N$, où N est un entier naturel. Or $3^4 = 81 \equiv 1$ [10], donc il suffit d'étudier N [4]. En effet, si $N = 4k + r$, $3^N = (3^4)^k \cdot 3^r \equiv 3^r$ [10].

En outre, N est lui aussi de la forme $N = 3^n$, où n est également une puissance de 3. Donc n est impair : $n = 2q + 1$ et $N = 9^q \cdot 3 \equiv 3$ [4] car $9 \equiv 1$ [4].

Ainsi, $N \equiv 3$ [4] et $3^N \equiv 3^3 = 27 \equiv 7$ [10].

Finalement, $G \equiv 7$ [10] : l'écriture décimale de G se termine par un 7.