Dixième feuille d'exercices

Intégrales généralisées

88 — ESB

Existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

89 — CCP

Étudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de

$$f : x \mapsto \frac{(x+1)^{1/4} - x^{1/4}}{x^{1/3}} \ln x.$$

90 — AM

Soit $f : x \mapsto x^{-1-1/x}$. Calculer $\int_0^1 f$ et $\int_1^{+\infty} f$.

91 — AM

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

92 — ENS

Nature de la série de terme général $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.

93 — CCP

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

94 — CCP

1. On pose

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}.$$

Montrer que

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2 x}.$$

Calculer I (on pourra poser $u = \tan x$).

2. Prouver la convergence de la série de terme général

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3\sin^2 x}.$$

3. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}.$$

Intégrales à paramètre

95 — CCP

Considérons la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'elle est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x)$.

3. Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

96 — TPE

1. Montrer que la fonction

$$G : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner G'.

2. Exprimer G à l'aide de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

3. Montrer que G admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

97 — MP

Sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, combien de fois s'annule la fonction

$$x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t\,?$$

98 — CS

1. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce domaine et lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

3. Étudier la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

99 — MP

Considérons le fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'elle est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Donner sa limite en $+\infty$.

3. Montrer qu'elle est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f''.

4. Calculer $f(0)$.