Corrigés des exercices de la dixième feuille

88 — ESB

L'intégrande f est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x\in]0,1]$,

$$|f(x)|\leqslant\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}\underset{0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $x\mapsto 1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $]0,1]$, $x\mapsto\sqrt{x}/\ln(1+x)$ aussi, donc f aussi.

Pour tout $x\in[1,+\infty[$,

$$|f(x)|\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{3/2}\ln x}\underset{+\infty}{\ll}\frac{1}{x^{3/2}}.$$

Comme $x\mapsto 1/x^{3/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $x\mapsto 1/(x^{3/2}\ln x)$ aussi, donc f aussi.

Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale converge.

89 — CCP

Préalable. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

Étude sur $]0,1]$. Au voisinage de 0,

$$f(x)\sim\frac{1}{x^{1/3}}\ln x\ll\frac{1}{x^{1/3}}\frac{1}{x^{1/3}}=\frac{1}{x^{2/3}}.$$

Or $\frac{2}{3}<1$ donc $x\mapsto 1/x^{2/3}$ est intégrable sur $]0,1]$ et f l'est aussi.

Étude sur $[1,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}(x+1)^{1/4}&=x^{1/4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/4}\\&=x^{1/4}\left(1+\frac{1}{4\,x}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)\\&=x^{1/4}+\frac{1}{4\,x^{3/4}}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{x^{3/4}}\Big),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\frac{1}{4\,x^{3/4}}+\mathrm{o}(\frac{1}{x^{3/4}})}{x^{1/3}}\ln x\\&\sim\frac{\ln x}{4\,x^{13/12}}\ll\frac{x^{1/24}}{x^{13/12}}=\frac{1}{x^{25/24}}.\end{aligned}$$

Or $\frac{25}{24}>1$ donc $x\mapsto 1/x^{25/24}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et f l'est aussi.

Conclusion. f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

90 — AM

On voit que $f(x)\sim_{+\infty}1/x$ et que $f(x)\gg_0 1/x$ donc f n'est intégrable ni sur $]0,1]$ ni sur $[1,+\infty[$!

Commentaire. Cet exercice n'est pas très gentil. C'est rare, mais ça arrive. Gardons toujours l'esprit ouvert.

91 — AM

Convergence. La fonction

$$f:x\mapsto\frac{1}{x}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}$$

est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$. De plus

$$f(x)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{6x^3}$$

et d'après les intégrales de Riemann, comme $3>1$, $x\mapsto 1/x^3$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f l'est aussi. Ainsi, l'intégrale converge.

Calcul. Faisons une intégration par parties en dérivant f et en intégrant $x\mapsto 1$. Les fonctions f et $g:x\mapsto x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$; alors l'égalité suivante est valide, à condition que deux des trois termes aient un sens :

$$\int_1^{+\infty}g'\,f=\Big[g\,f\Big]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}g\,f'.$$

Or $\int_1^{+\infty}g'\,f$ converge, c'est l'intégrale de départ ; et le crochet a un sens car $\lim_{+\infty}g\,f=0$, d'après l'équivalent de f ci-dessus. Alors,

$$\begin{aligned}&\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\left[x\left(\frac{1}{x}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\right]_1^{+\infty}\\&\quad-\int_1^{+\infty}x\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}-1+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ici, nous « reconnaissons » une dérivée usuelle : pour $x>1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

donc

$$\begin{aligned}&\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\mathrm{d}x\\&=\Big[\ln x-\ln(x+\sqrt{x^2-1}\,)\Big]_1^{+\infty}\\&=\left[\ln\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right]_1^{+\infty}=\ln\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1-\ln 2.$$

Variante. Voici une autre calcul, dont les détails et justifications sont laissées en exercice.

$$\begin{aligned}&\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(u-\operatorname{Arcsin}u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}&&\left(u=\frac{1}{x}\right)\\&=\left[-\frac{1}{u}\,(u-\operatorname{Arcsin}u)\right]_0^1\\&\quad+\int_0^1\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u&&\text{(IPP)}\\&=-1+\frac{\pi}{2}\\&\quad+\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin\theta}\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta&&(u=\sin\theta)\\&=-1+\frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$= -1 + \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$
$$= -1 + \frac{\pi}{2} + \Big[2\ln\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2}$$
$$= -1 + \frac{\pi}{2} + \ln\frac{1}{2}.$$

92 — ENS

Pour $n \geqslant 1$, $t \mapsto e^{-nt^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, car $e^{-nt^2} \ll_{+\infty} 1/t^2$. De plus, en posant $u = \sqrt{n}\,t$, qui est un changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif donc licite,

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc la série de l'énoncé diverge.

93 — CCP

Convergence. La fonction $f : x \mapsto x^2/(1+x^2)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, en $+\infty$, $f(x) \sim 1/x^2$, et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale converge.

Calcul. Intégrons par parties. C'est licite car tous les termes manipulés ont un sens.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^{+\infty} x\,\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[-x\,\frac{1}{2\,(1+x^2)}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\,(1+x^2)}$$
$$= 0 + \frac{1}{2}\Big[\operatorname{Arctan} x\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

94 — CCP

1. L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$, π-périodique et paire. Alors son intégrale est la même sur tout intervalle de longueur π, par exemple $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; et par parité, on peut couper l'intervalle en deux :

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a^2\sin^2 x}.$$

La fonction tangente est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $[0, +\infty[$, donc le changement de variable proposé est autorisé et l'on peut écrire

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}}{1 + a^2\,(1 - \frac{1}{1+u^2})}$$
$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + (1+a^2)\,u^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\Big[\operatorname{Arctan}(u\sqrt{1+a^2}\,)\Big]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

2. Majorons u_k. Pour $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $x \geqslant k\pi$, donc

$$\frac{1}{1 + x^3\sin^2 x} \leqslant \frac{1}{1 + (k\pi)^3\sin^2 x},$$

et en intégrant sur $[k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3\sin^2 x} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (k\pi)^3\sin^2 x},$$

ou encore $u_k \leqslant v_k$, en nommant v_k la seconde intégrale. Par un calcul analogue à celui de la première question,

$$v_k = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (k\pi)^3\sin^2 x}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{1 + (k\pi)^3}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}.$$

Comme $3/2 > 1$, la série de Riemann $\sum 1/k^{3/2}$ converge, donc $\sum v_k$ converge, et $\sum u_k$ aussi.

3. La fonction $f : x \mapsto 1/(1 + x^3\sin^2 x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle y est intégrable si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge en $+\infty$. Comme $f \geqslant 0$, F croît, donc elle converge en $+\infty$ si et seulement s'il existe une suite (x_n) croissant vers $+\infty$ telle que la suite $(F(x_n))$ converge. Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = F((n+1)\pi).$$

Comme $\sum u_k$ converge, la suite $(F((n+1)\pi))$ converge, donc la fonction F converge en $+\infty$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

95 — CCP

1. Considérons $A = \mathbb{R}_+^*$, $I = [0, +\infty[$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-2t}}{x + t}.$$

Utilisons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

- ∘ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur A, par opérations usuelles.
- ∘ De même, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue (par morceaux) sur I.
- ∘ Pour tout segment $[a, b] \subset A$ avec $0 < a < b$, et pour tout $(x, t) \in [a, b] \times I$, $x + t \geqslant a$ donc
$$|g(x,t)| \leqslant \tfrac{1}{a}\,e^{-2t},$$
où $t \mapsto e^{-2t}$ est continue et intégrable sur I car $2 > 0$, donc g vérifie l'hypothèse de domination.

Alors,

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est définie et continue sur tout segment de A, donc sur A.

2. Soit $x > 0$. On a

$$x\,f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(x + t - t)\,e^{-2t}}{x + t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-2t}}{x + t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in I$, $x + t \geqslant x$ donc

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-2t}}{x + t}\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t\,e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,f(x) = \dfrac{1}{2}$.

3. Par définition des équivalents, cela signifie que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

96 — TPE

1. Posons $A = \mathbb{R}$, $I = [0,1]$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) donc intégrable sur le *segment* I ; pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; et pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2\,x\,e^{-x^2(1+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur I.

Enfin, pour tout segment $[a,b] \subset A$ et tout $x \in [a,b]$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\max(|a|,|b|)$, ce qui est une domination valide.

Alors, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ; G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de A, donc sur A ; et pour tout x de A,

$$G'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2\,x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

2. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme primitive de la fonction continue $t \mapsto e^{-t^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-x^2}$.

Par ailleurs, pour $x \neq 0$, en posant $u = x\,t$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,x\,\mathrm{d}t \\ &= -2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\,F'(x)\,F(x). \end{aligned}$$

Alors $G(x) = G(0) - F^2(x)$. Or $G(0) = \frac{\pi}{4}$, donc $G = \frac{\pi}{4} - F^2$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}$, donc $\lim_{+\infty} G = 0$.

4. Alors $\lim_{+\infty} F = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Or $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $e^{-u^2} \ll_{+\infty} e^{-u}$, donc

$$\lim_{+\infty} F = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

97 — MP

Variations. Nommons f la fonction de l'énoncé et montrons qu'elle décroit strictement sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$, directement, sans la dériver.

Soient x et y deux réels de $[\frac{\pi}{2},\pi]$ tels que $x < y$. Pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ et $0 \leqslant x\sin t \leqslant y\sin t \leqslant \pi$. Comme le cosinus décroit sur $[0,\pi]$, $\cos(x\sin t) \geqslant \cos(y\sin t)$. En fait, l'égalité n'a lieu qu'en $t = 0$ ou $t = \pi$. Alors, par croissance de l'intégrale, $f(x) > f(y)$. L'inégalité est stricte, car les deux intégrandes ne sont égaux que pour $t \in \{0,\pi\}$. Ainsi, f décroit strictement donc s'annule au plus une fois sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

Commentaire. Comme quoi, il n'est pas toujours nécessaire de se précipiter sur les gros théorèmes.

Signes. Si $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(\pi)$ sont de signes contraires, f s'annule exactement une fois sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$. Prouvons-le.

D'une part, $f(\frac{\pi}{2}) = \int_0^\pi \cos(\frac{\pi}{2}\sin t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $t \in [0,\pi]$, $\frac{\pi}{2}\sin t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{\pi}{2}\sin t) \geqslant 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Là encore, l'inégalité est stricte car $\cos(\frac{\pi}{2}\sin t)$ n'est nul qu'en $t = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, $f(\pi) = \int_0^\pi \cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $t \in [0,\pi]$, $\sin(\pi - t) = \sin t$, donc en posant $u = \pi - t$, on a

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \int_0^{\pi/2}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2}\cos(\pi\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\cos(\pi\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, par concavité du sinus, on « sait » que $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\,t$. Donc $\cos(\pi\sin t) \leqslant \cos(2\,t)$ et $f(\pi) < \int_0^{\pi/2}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = 0$, ce que l'on voulait.

98 — CS

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}\,e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0,1[$. De plus, $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$ et $\lim_{t\to 1^-} h(t) = e^{-x}$ donc h se prolonge par continuité sur $[0,1]$. Donc elle est intégrable sur $]0,1[$.

Ainsi, F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Posons $A = \mathbb{R}$ et $I =]0,1[$. Soit

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t}\,e^{-xt}.$$

On vient de voir que pour tout $x \in A$, $h : t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur I. De plus, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\frac{t-1}{\ln t}\,e^{-xt}.$$

Bien-sûr, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I. Enfin, pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et tout $(x,t) \in [a,b] \times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t-1}{\ln t}\,e^{-at} = g(a,t),$$

où $t \mapsto g(a,t)$ est intégrable sur I, on l'a vu.

Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -\int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

En outre, pour $x \geqslant 0$,

$$|F'(x)| = \int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Notons k cette dernière intégrale. D'après l'inégalité des accroissements finis, F est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour étudier la convergence de la suite (x_n), étudions celle de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$.

Comme F est k-lipschitzienne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_{n+1} - x_n| = |F(x_n) - F(x_{n-1})| \leqslant k\,|x_n - x_{n-1}|,$$

donc par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n\,|x_1 - x_0|.$$

Par concavité, pour tout $t \in I$, $\ln t \leqslant t - 1 \leqslant 0$, donc $1 \geqslant \frac{t-1}{\ln t} \geqslant 0$ et $k \leqslant \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la série géométrique $\sum k^n$ converge, donc la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge absolument, donc la suite (x_n) converge.

99 — **MP**

1. Posons $A = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}_+^*$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}.$$

Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est clairement continue sur I. Pour tout $t \in A$, $x \mapsto g(x,t)$ est tout aussi clairement continue sur A. Pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{|1-\cos t|}{t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue sur I. De plus, en 0, $\varphi(t) \sim \frac{1}{2}$, donc φ se prolonge en une fonction continue en 0, donc elle est intégrable sur $]0,1]$. Et pour $t \geqslant 1$, $\varphi(t) \leqslant \frac{2}{t^2}$, où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc φ l'est aussi. Ainsi, φ est intégrable sur I et constitue une domination valide de g. Alors, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I, et f est définie et continue sur A.

2. Soit $x \in A$. On a vu que φ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) \leqslant \frac{2}{t^2} \leqslant 2$. Donc φ est bornée sur I : notons M l'un de ses majorants. Pour tout $t \in I$,

$$|g(x,t)| \leqslant \varphi(t) e^{-xt} \leqslant M e^{-xt},$$

donc, si $x > 0$ (pour que $t \mapsto e^{-xt}$ soit intégrable sur I),

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |g(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x}.$$

Ainsi, $\lim_{+\infty} f = 0$.

3. Notons $A' = \mathbb{R}_+^*$. La fonction g est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur $A' \times I$. En particulier, elle admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto -\frac{1-\cos t}{t} e^{-xt},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} : (x,t) \mapsto (1-\cos t)\, e^{-xt},$$

qui sont définies et continues sur $A' \times I$. On a déjà vu que pour tout $x \in A'$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I. Soit $x \in A'$. Pour tout $t \in I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\varphi(t)\, e^{-xt}.$$

La fonction $t \mapsto t\,\varphi(t)$ est bornée sur $]0,1]$, comme produit de fonctions qui le sont. De plus, pour $t \geqslant 1$, $t\,\varphi(t) \leqslant \frac{2}{t} \leqslant 2$, donc $t \mapsto t\,\varphi(t)$ est bornée sur I : soit M_1 l'un de ses majorants. On a donc

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M_1\, e^{-xt},$$

où $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur I puisque $x > 0$. Alors $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est aussi intégrable sur I. Enfin, pour tout segment $[a,b] \subset A'$ et tout $(x,t) \in [a,b] \times I$,

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2\, e^{-xt} \leqslant 2\, e^{-at},$$

où $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur I puisque $a > 0$, donc $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ vérifie bien l'hypothèse de domination.

Il s'ensuit que f est $\mathscr{C}^2$ sur A' et que pour $x \in A'$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i-x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

4. Alors, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in A'$, $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + b$ et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
f(x) &= a + b\,x \\
&\quad + x\ln x - \tfrac{1}{2}\, x \ln(1+x^2) - \operatorname{Arctan} x.
\end{aligned}$$

Mais l'on sait que f tend vers 0 en $+\infty$. Par ailleurs, $\lim_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \frac{\pi}{2}$ et

$$\begin{aligned}
x\ln x - \frac{1}{2}\, x \ln(1+x^2) &= -\frac{1}{2}\, x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
&\sim_{+\infty} -\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Donc on doit avoir $b = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in A'$.

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x + x\ln x - \tfrac{1}{2}\, x\ln(1+x^2).$$

Enfin, nous savons que f est continue en 0, donc

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{x\to 0} f(x) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x + x\ln x - \tfrac{1}{2}\, x\ln(1+x^2)\right) \\
&= \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Bonus. On vient de voir que

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Grâce à une intégration par parties, dont la justification est laissée en exercice, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$