Onzième feuille d'exercices

Suites de fonctions

100 — CCP

Étudier la suite des fonctions
$$f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1}\, e^{-nx^2}.$$

101 — ENGEES

Étudier la suite des fonctions
$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x^n)}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

102 — CCP

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \cos((1+\frac{1}{n})x)$.

2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$? sur tout segment de $\mathbb{R}$?

103 — MP

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ où
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n - n^2\,|x| & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

104 — CCP

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Trouver $\lim I_n$ et $\lim n\,I_n$ où $I_n = \int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

105 — MP

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en utilisant les fonctions
$$f_n : t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

106 — CCP

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t & \text{si } t \in \left]0, n\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t = -\gamma.$$

On pourra faire le changement de variable $t = n\,u$ puis une intégration par parties.