Corrigés des exercices de la onzième feuille

100 — **CCP**

Convergence simple. Les fonctions f_n sont paires, il suffit donc d'étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

Si $x=0$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Si $x>0$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x=0, \\ 0 & \text{si } x>0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Convergence uniforme sur $[0,+\infty[$. Les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ alors que la limite simple f ne l'est pas. Alors, la suite (f_n) ne peut converger uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ où $a>0$. Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x \geqslant a$,

$$|f_n(x)| = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \leqslant \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} = f_n(a).$$

Comme $a>0$, la suite $(f_n(a))$ tend vers 0 et ne dépend pas de x. Donc la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,+\infty[$.

101 — **ENGEES**

Convergence simple. Introduisons la fonction

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

de sorte que $f_n(x) = \varphi(x^n)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Comme φ est paire, menons l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \geqslant 0$.

Si $x<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \varphi(y) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Si $x=1$, $f_n(1) = \varphi(1) = \sin 1$.

Si $x>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \varphi(y) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Alors (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x<1, \\ \sin 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x>1. \end{cases}$$

Convergence uniforme. Comme f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$ quand les f_n le sont, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Voici néanmoins une preuve directe. En posant $x_n = 1+1/n$, comme $(1+1/n)^n \to e$ et que φ est continue en e,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \varphi(x_n^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(e) \neq 0.$$

Ainsi, (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, ni même sur $]1,+\infty[$ puisque $x_n>1$.

Manifestement, il faut s'écarter de 1.

Convergence uniforme sur tout $[a,+\infty[$ où $a>1$. Soit $a>1$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{a^n},$$

où $(1/a^n)$ converge vers 0 indépendamment de x, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.

On traite de la même façon le cas des intervalles $[0,a]$ où $0<a<1$.

102 — **CCP**

1. Convergence simple. Soit $x\in\mathbb{R}$. Clairement, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \cos x$, et la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f=\cos$.

2. Convergence uniforme. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \cos((1+\tfrac{1}{n})x) - \cos x \\ &= -2\sin((1+\tfrac{1}{2n})x)\sin\tfrac{x}{2n}. \end{aligned}$$

Alors, en choisissant $x_n = n\pi$, on voit que la suite de terme général $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 2$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui signifie que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme sur tout segment. Soit un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$, avec $a<b$. Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= 2\,|\sin((1+\tfrac{1}{2n})x)|\,|\sin\tfrac{x}{2n}| \\ &\leqslant 2\,|\tfrac{x}{2n}| \leqslant \tfrac{1}{n}\max\{|a|,|b|\}. \end{aligned}$$

Ce dernier majorant ne dépend pas de x et tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

103 — **MP**

Les fonctions f_n sont clairement paires, donc il suffit de mener l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence simple. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Clairement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(0) = n$ et la suite $(f_n(0))$ diverge. Supposons $x>0$. Alors, pour n assez grand, $x>1/n$ et $f_n(x) = 0$. Alors la suite $(f_n(x))$ converge vers 0.

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on voit que $1/n^2 \leqslant 1/n$ donc

$$f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = n-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, la suite de terme général $f_n(1/n^2) - 0$ ne tend pas vers 0, ce qui prouve que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Convergence uniforme sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a>0$. Soit $a>0$. Pour n assez grand, $a>1/n$, donc pour tout $x\in[a,+\infty[$, $f_n(x)=0$ et $\|f_n-0\|_\infty^{[a,+\infty[}=0$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$ vers la fonction nulle.

104 — CCP

1. Les fonctions $f_n : t\mapsto t^n f(t)$ sont continues sur $[0,1]$; la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers

$$t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t<1,\\ f(1) & \text{si } t=1,\end{cases}$$

laquelle fonction est continue par morceaux sur $[0,1]$; et pour tout n, $|f_n|\leqslant\|f\|_\infty^{[0,1]}$, où $t\mapsto\|f\|_\infty^{[0,1]}$ est positive, continue et intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée, les f_n et leur limite simple sont intégrables sur $[0,1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

2. Posons $u=t^n$. On a $n\,I_n=\displaystyle\int_0^1\sqrt[n]{u}\,f(\sqrt[n]{u})\,\mathrm{d}u$.

Soit $g_n : u\mapsto\sqrt[n]{u}\,f(\sqrt[n]{u})$. On voit que $g_n(0)=0$ et que $(g_n(u))$ tend vers $f(1)$ si $u\neq0$. Donc (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$g : u\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } u=0,\\ f(1) & \text{si } u>0.\end{cases}$$

Les g_n sont continues sur $[0,1]$; (g_n) converge simplement vers g qui est continue par morceaux ; enfin, pour tout n, $|g_n|\leqslant\|f\|_\infty^{[0,1]}$: c'est la même domination que plus haut. D'après le théorème de convergence dominée, les g_n et g sont intégrables sur $[0,1]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} n\,I_n=\int_0^1 g=f(1).$$

105 — MP

Permutation. Appliquons le théorème de convergence dominée.

- Les f_n sont positives et continues sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $t\geqslant0$ fixé,

$$f_n(t)=e^{-n\ln(1+t^2/n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-t^2}$$

et la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f : t\mapsto e^{-t^2}$.

- La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.
- Enfin, pour tout $t\geqslant0$,

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{t^{2k}}{n^k}=1+t^2+\underbrace{\cdots}_{\geqslant0}$$

donc $f_n(t)\leqslant f_1(t)$. Or f_1 est positive, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, donc cette inégalité est une domination valide.

Alors,

- les f_n et f sont intégrables sur $[0,+\infty[$;
- on peut écrire

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t^2}{n})^n}.$$

Calcul. Posons $t=\sqrt{n}\tan\theta$: il s'agit d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\frac{\pi}{2}[$ dans $[0,+\infty[$. Alors, en utilisant un résultat classique sur les intégrales de Wallis, puis la formule de Stirling, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t^2}{n})^n}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{n}\,\frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^n}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{n}\,(2n-2)!}{2^{2n-2}\,[(n-1)!]^2}\,\frac{\pi}{2}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

106 — CCP

1. Soit $t>0$. Pour n assez grand, $n\geqslant t$, donc

$$\begin{aligned}f_n(t)&=\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln t\\&=\exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\ln t\\&=\exp\left((n-1)\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\ln t\\&\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-t}\ln t.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R},\ t\mapsto e^{-t}\ln t$.

2. Utilisons le théorème de convergence dominée.

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$; la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f, on vient de le voir ; la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $t\in\,]0,n[$. On sait que $\ln(1-u)\leqslant-u$ par concavité. Donc, puisque $t\leqslant n$,

$$\begin{aligned}(n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)&\leqslant-(n-1)\frac{t}{n}\\&=-t+\frac{t}{n}\leqslant-t+1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|f_n(t)|&=\exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)|\ln t|\\&\leqslant e\,e^{-t}\,|\ln t|=\varphi(t).\end{aligned}$$

Et bien-sûr, si $t\in[n,+\infty[$, $f_n(t)=0$ donc $|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; $\varphi(t)\sim_0|\ln t|$ et ln est intégrable sur $]0,1[$; $\varphi(t)\ll_{+\infty}e^{-t/2}$ et $t\mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il s'ensuit que les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on peut permuter :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t&=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}f_n(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

puisque $f_n=0$ sur $]n,+\infty[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $t = nu$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ donc il est licite : sachant que la première intégrale a un sens, la suivante aussi

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 n\,(1-u)^{n-1} \ln(n\,u)\,\mathrm{d}u.$$

On voudrait ensuite intégrer par parties comme suit :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(n\,u)\,\mathrm{d}u\\ &= \Big[-(1-u)^n \ln(n\,u)\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-u)^n\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned}$$

Pour valider ce calcul, deux des trois écritures doivent avoir un sens : la première en a un avec ce qui précède ; mais le crochet n'a pas de sens en 0, donc l'intégration par parties est invalide. Cependant, $-(1-u)^n$ n'est qu'*une* primitive de $n\,(1-u)^{n-1}$, les autres s'en déduisent en ajoutant une constante. Or la difficulté dans le crochet vient du ln en 0. Si l'on choisit comme primitive $1-(1-u)^n$, alors cette primitive neutralise le ln en 0 : en effet,

$$(1-(1-u)^n)\ln(n\,u) \sim_0 n\,u\ln u \to_0 0.$$

Alors écrivons

$$\begin{aligned}&\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(n\,u)\,\mathrm{d}u\\ &= \Big[(1-(1-u)^n)\ln(n\,u)\Big]_0^1 - \int_0^1 (1-(1-u)^n)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned}$$

La première intégrale a toujours un sens. Maintenant, le crochet en a un aussi d'après l'argument précédent. Alors la deuxième intégrale a forcément un sens et l'intégration par parties est valide. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(n\,u)\,\mathrm{d}u\\ &= \ln n - \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \ln n - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-u)^k\right)\mathrm{d}u\\ &= \ln n + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\ &= \ln n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &\sim_{+\infty} -\gamma.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\mathrm{d}u = -\gamma.$$