

Douzième feuille d'exercices

SÉRIES DE FONCTIONS

107 —————

Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2 + x}.$$

108 ————— **CCP**

Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}.$$

1. Étudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

109 ————— **CCP**

Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ où

$$f_n : x \mapsto \frac{\ln x}{x^n \ln n}.$$

110 —————

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 - 1}$.

111 ————— **MP**

Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \right)$.

112 ————— **CCP**

Montrer la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{x^2 + n^2}.$$

113 ————— **MP**

1. Prouver la classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

2. Expliciter f' et montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right).$$

114 ————— **MP**

1. Étudier la définition, puis la continuité de

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

2. Donner la limite de f en $+\infty$.
3. Trouver un équivalent de f en 0.

115 ————— **AM**

Considérons une série complexe $\sum c_n$ absolument convergente.

1. Montrer la continuité de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n t^n}{n!}.$$

2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

116 ————— **AM**

Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.