Corrigés des exercices de la douzième feuille

107

Convergence normale. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant 1/n^2$. Or la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Elle y converge donc uniformément, et simplement.

108 **CCP16**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est clairement alternée. Étudions donc la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$.

Si $x < 0$, cette suite diverge vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x \geqslant 0$, cette suite tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. Soient $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

D'après le théorème spécial des séries alternées,

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ce dernier majorant ne dépend pas de x et tend vers 0, donc la suite de fonctions $(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

109 **CCP**

Convergence simple. Soit $x > 0$.

Si $x < 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $\sum_{n\geqslant 2} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x = 1$, pour tout $n \geqslant 2$, $f_n(1) = 0$ et $\sum_{n\geqslant 2} f_n(1)$ converge.

Si $x > 1$, pour tout $n \geqslant 3 \geqslant e$,

$$|f_n(x)| = \frac{\ln x}{x^n \ln n} \leqslant \frac{\ln x}{x^n}.$$

Ce majorant est terme général d'une série géométrique de raison $1/x < 1$ donc qui converge ; par majoration, $\sum_{n\geqslant 2} f_n(x)$ converge.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$.

Dans la suite, posons $I = [1, +\infty[$.

Convergence uniforme sur I. Soient $x \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$. D'une part, $R_n(1) = 0$. D'autre part, si $x > 1$,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \ln x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k \ln k} \leqslant \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} \\ &= \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{1/x^{n+1}}{1 - 1/x} = \frac{\ln x}{\ln(n+1)\, x^n\, (x-1)} \\ &\leqslant \frac{\ln x}{\ln(n+1)\,(x-1)}.\end{aligned}$$

Grâce à une étude rapide, la fonction $x \mapsto \ln x/(x-1)$ décroît sur $]1, +\infty[$ et elle tend vers 1 en 1. Donc pour tous $x \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 avec n, donc la suite de fonctions $(R_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge uniformément sur I.

Convergence normale sur I. Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $x \geqslant 1$,

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1} \ln n},$$

où l'on voit que $f_n' \geqslant 0$ donc f_n croît sur $[1, e^{1/n}]$, et $f_n' \leqslant 0$ donc f_n décroit sur $[e^{1/n}, +\infty[$. Et comme $f_n \geqslant 0$,

$$\|f_n\|_\infty^I = f_n(e^{1/n}) = \frac{1}{e\, n \ln n}.$$

Pour étudier $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n \ln n)$, faisons une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto 1/(t \ln t)$ décroit clairement sur $[2, +\infty[$. Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n \ln n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}.$$

Pour tout $N \geqslant 2$, en sommant pour les $n \in [\![2, N]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} &\geqslant \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \\ &= \ln\ln(N+1) - \ln\ln 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.\end{aligned}$$

Où l'on voit que $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n \ln n)$ diverge, donc $\sum_{n\geqslant 2} \|f_n\|_\infty^I$ diverge et $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ ne converge pas normalement sur I.

Convergence normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 1$. Dans l'étude précédente, on a vu que $\|f_n\|_\infty^I$ est atteinte en $e^{1/n}$ et la suite $(e^{1/n})$ tend vers 1. Alors il est judicieux de s'écarter de 1.

Plaçons-nous sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 1$. Comme $e^{1/n} \to 1$, à partir d'un certain rang N, $e^{1/n} < a$, donc f_n décroit sur $[a, b]$ et

$$\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = f_n(a).$$

Or $\sum_{n\geqslant 2} f_n(a)$ converge donc $\sum_{n\geqslant N} \|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[}$ converge et la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

110

Permutation. On voit que la série des fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n^2-1}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ car

$$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge. Alors, d'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(nx)}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

Calcul. Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

111 **MP**

Permutation. Considérons les fonctions

$$f_n : t \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right).$$

Pour tout t réel, $(|f_n(t)|)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0 donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Toujours d'après ce théorème, en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$,

$$|R_n(t)| \leqslant |f_{n+1}(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = 0$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ell_n.$$

D'après le théorème de la double limite, $\sum \ell_n$ converge et

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \ell.$$

Calcul. Pour calculer ℓ, il suffit d'évaluer les sommes partielles d'indices pairs (ou impairs). Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2p} \ell_n &= \sum_{k=1}^{p} (\ell_{2k-1} + \ell_{2k})\\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(-\ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p} \ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{p}(2k-1)\prod_{k=1}^{p}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{p}(2k)^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(\prod_{k=1}^{p}(2k-1))^2(2p+1)}{(\prod_{k=1}^{p}(2k))^2}\right)\\ &= 2\ln\left(\frac{(2p)!\sqrt{2p+1}}{2^{2p}(p!)^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Stirling,

$$\lim_{+\infty} f = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

112 **CCP**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}n}{x^2+n^2}.$$

Comme les f_n sont paires, étudions-les sur $\mathbb{R}_+$.

○ Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Pour tout $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}2nx}{(x^2+n^2)^2}.$$

○ Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Utilisons le théorème spécial des séries alternées. Clairement, $(-1)^n f_n(x)$ ne change pas de signe et $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. Pour étudier la décroissance de la suite $(|f_n(x)|)$, posons $g : y \mapsto y/(y^2+x^2)$, de sorte que $|f_n(x)| = g(n)$. Pour tout $y \geqslant 0$,

$$g'(y) = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}.$$

Il s'ensuit que $g'(y) < 0$ pour $y > |x|$: ainsi, $(|f_n(x)|)$ décroit à partir du rang $N = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Du coup, $\sum f_n(x)$ converge d'après le théorème des séries alternées, donc $\sum f_n$ converge simplement sur I.

○ Soient $b > 0$, $x \in [0,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $0 \leqslant x \leqslant b$, on a

$$|f_n'(x)| = \frac{2nx}{(x^2+n^2)^2} \leqslant \frac{2nb}{n^4} = \frac{2b}{n^3}.$$

Or $\sum 1/n^3$ converge comme série de Riemann avec $3 > 1$. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,b]$.

- Il s'ensuit que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,b]$. Comme c'est vrai pour tout $b > 0$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- De plus, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2nx}{(x^2+n^2)^2}.$$

Et puisque $f'(0) = 0$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

113 — MP

1. Posons $f_n : x \mapsto x^n \sin(nx)/n$.

∘ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, par opérations usuelles.

∘ Pour tout $x \in\,]-1,1[$, $|f_n(x)| \leqslant |x|^n$ et $\sum |x|^n$ converge comme série géométrique de raison $|x|<1$ donc $\sum f_n$ converge simplement sur$]-1,1[$.

∘ Pour tout $x \in\,]-1,1[$,

$$f_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx).$$

Soient $a \in [0,1[$, $x \in [-a,a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $|x| \leqslant a$, donc $|f_n'(x)| \leqslant a^{n-1} + a^n \leqslant 2\,a^{n-1}$. Comme $a \in [0,1[$, $\sum a^{n-1}$ converge, et $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-a,a]$.

• Alors, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a,a]$. Comme c'est vrai pour tout $a \in [0,1[$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

• Et pour tout $x \in\,]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)).$$

2. D'une part, pour tout $x \in\,]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) &= \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\, e^{i(n+1)x}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-x\,e^{ix}}\right) = \frac{\sin x}{1-2x\cos x + x^2},\\ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\cos(nx) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\, e^{inx}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{x\,e^{ix}}{1-x\,e^{ix}}\right) = \frac{x\cos x - x^2}{1-2x\cos x + x^2},\end{aligned}$$

donc

$$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1-2x\cos x + x^2}.$$

D'autre part, en introduisant la fonction

$$g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right),$$

pour tout $x \in\,]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1-2x\cos x + x^2},$$

donc sur $]-1,1[$, $f' = g'$. Et comme $f(0) = g(0)$, $f = g$.

114 — MP

1. Définition. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$.

L'ensemble de définition de f est l'ensemble des x pour lesquels $\sum f_n(x)$ converge, c'est-à-dire l'ensemble sur lequel $\sum f_n$ converge simplement.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leqslant 0$, la suite $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0, donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x > 0$, $f_n(x) \ll 1/n^2$, donc $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, donc f est définie sur $]0,+\infty[$.

Continuité. ∘ Les f_n sont clairement continues sur $]0,+\infty[$, par opérations usuelles.

∘ Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(a)$ car f_n décroit sur $[a,+\infty[$. Or $\sum f_n(a)$ converge car $a > 0$. Donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

• Il s'ensuit que f est continue sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a > 0$, donc elle l'est sur $]0,+\infty[$.

2. Appliquons le théorème de la double limite.

∘ On vient de voir que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$, par exemple.

∘ Clairement, $\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

• Alors, la série de ces limites converge, ce qui n'est pas une surprise ici.

• Et en $+\infty$, f tend vers la somme de cette série : autrement dit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

3. Faisons une comparaison série-intégrale.

Soit $x > 0$ fixé. Introduisons la fonction $g_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = g_x(n)$. Cette fonction g_x décroit sur $[0,+\infty[$, donc pour $N \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\int_0^{N+1} g_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N} g_x(n) \leqslant 1 + \int_0^N g_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

En posant $u = x\sqrt{t}$, c'est-à-dire $t = (u/x)^2$,

$$\int_0^N e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}\int_0^{x\sqrt{N}} e^{-u}\,u\,\mathrm{d}u,$$

et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^{x\sqrt{N}} e^{-u}\,u\,\mathrm{d}u &= \Big[-e^{-u}\,u\Big]_0^{x\sqrt{N}} + \int_0^{x\sqrt{N}} e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= -x\sqrt{N}\,e^{-x\sqrt{N}} + 1 - e^{-x\sqrt{N}},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^N e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{x^2}\left(1 - (x\sqrt{N}+1)\,e^{-x\sqrt{N}}\right)\\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

En passant à la limite sur N, on a donc

$$\frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2},$$

d'où $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

115 — AM

1. Considérons les fonctions $f_n : t \mapsto c_n\, t^n/n!$

Comme $\sum c_n$ converge absolument, (c_n) tend vers 0 donc elle est bornée, disons par C. Soit $[a,b]$ un segment avec $a < b$. Notons $M = \max(|a|,|b|) > 0$. Pour tout $t \in [a,b]$,

$$\left|\frac{c_n\,t^n}{n!}\right| = \frac{|c_n|\,|t|^n}{n!} \leqslant \frac{C\,M^n}{n!}.$$

La série $\sum C\,M^n/n!$ converge comme série exponentielle. Cela entraine que $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Comme les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi.

2. Posons $g_n : t \mapsto f_n(t)\, e^{-t}$ et $I = \mathbb{R}_+$.

Les g_n sont continues sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$ et t voisin de $+\infty$, $|g_n(t)| \ll e^{-t/2}$, où la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur I. Donc g_n est intégrable sur I. Comme $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, elle converge simplement sur $\mathbb{R}$. Alors, $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc sur I, et sa somme est $g : t \mapsto f(t)\, e^{-t}$, qui est continue sur I, puisque f l'est. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{|c_n|}{n!}\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{|c_n|}{n!}\,\Gamma(n+1) = |c_n|.\end{aligned}$$

Or, $\sum |c_n|$ converge, donc $\sum \int_{\mathbb{R}_+} |g_n|$ aussi.

Alors, la fonction g est intégrable sur I et

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, d'après le calcul précédent,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

116 — **AM**

Convergence. La fonction $f : x \mapsto (t-1)/\ln t$ est continue sur $]0,1[$. De plus, $\lim_0 f = 0$ et $\lim_1 f = 1$ donc f se prolonge par continuité sur $[0,1]$, donc elle y est intégrable.

Calcul formel. Voici un calcul que l'on justifiera ensuite.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t &\overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &\overset{(2)}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &\overset{(3)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\int_0^{+\infty} u^n\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &\overset{(4)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \overset{(5)}{=} \ln 2.\end{aligned}$$

Justifications. (1) Le changement de variable $t = e^{-u}$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$, donc les fonctions $t \mapsto (t-1)/\ln t$ et $u \mapsto (1-e^{-u})\, e^{-u}/u$ sont simultanément intégrables, respectivement sur $]0,1[$ et $]0,+\infty[$. La première l'est, donc la seconde aussi et l'égalité (1) est justifiée.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$, donc pour tout $u > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{-u}}{u} &= \frac{1}{u}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-u)^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-u)^{n-1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-u)^n}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

(4) On reconnait que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} u^n\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma(n+1) = n!$$

et (4) est justifiée.

(5) Nous avons rencontré cette somme dans un exemple du cours.

(3) Les fonctions $f_n : u \mapsto (-u)^n\, e^{-u}/(n+1)!$ sont continues sur $]0,+\infty[$. De plus, les f_n se prolongent clairement par continuité en 0, donc elles sont intégrables sur $]0,1]$. Enfin, elles sont intégrables sur $[1,+\infty[$ car par comparaison usuelle, $f_n(u) \ll_{u\to+\infty} 1/u^2$. On vient de voir que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que sa somme $u \mapsto (1-e^{-u})\, e^{-u}/u$ est continue sur $]0,+\infty[$. Enfin, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Mais $\sum 1/(n+1)$ diverge et le théorème de permutation $\sum$ et $\int$ ne s'applique pas.

Alors procédons à la main. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &\quad + \int_0^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

D'une part, par linéarité de l'intégrale et d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= \sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

D'autre part, toujours d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-u)^n}{(n+1)!}\, e^{-u}\right|\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{(-u)^{N+1}}{(N+1)!} e^{-u}\right|\mathrm{d}u = \frac{1}{N+2}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Alors, (3) est justifiée.