Treizième feuille d'exercices

Séries entières

117

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, où l'on donne a_n.

1. [CCP] $a_n = 1$ si n est premier et $a_n = 0$ sinon.

2. [CCP] $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

3. [CCP] a_n est le nombre de diviseurs non nuls de n ; a_n est la somme de ces diviseurs.

4. [CCP] $a_n = \ln \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$.

5. [CCP] $a_n = \ln \dfrac{n+1}{n}$; $a_n = \sin(e^{-n})$.

6. [CCP] $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

118

Déterminer la somme des séries entières suivantes. On précisera le rayon de convergence de chacune.

1. [AM] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n$. **2.** [CCP] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

3. [CCP] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n$. **4.** [CCP] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

5. [MP] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$.

6. [TPE] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$, où $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

119

Calculer les sommes suivantes.

1. [MP] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$. **2.** [MP] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+2i)^n}$.

3. [CCP] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)2^n}$. **4.** [WP] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

120

Développer les fontions suivantes en série entière. On précisera le rayon de convergence pour chacune.

1. [EIVP] $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$. **2.** [CCP] Arcsin^2.

3. [MP] $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

121 — AM

Résoudre $x y'' + 3y' - 4x^3 y = 0$.

122 — AM

Soit l'équation différentielle $x y'' + y' + y = 0$.

Déterminer ses solutions développables en série entière autour de 0. On précisera successivement :

a) la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n) ;

b) l'expression de a_n (à l'aide de factorielles) ;

c) le rayon de convergence de la série.

123 — CCP

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitive G de f définie sur l'intervalle $]-1, 3[$ telle que $G(1) = 0$.

2. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.

3. En déduire la valeur de $G^{(3)}(0)$.

124 — CCP

Posons $f(0) = 1$, $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, et $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

125

Soient N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

1. Établir que $G_S = G_N \circ G_X$.

2. On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald

$$E(S) = E(N)\,E(X_1).$$

126 — CCP

1. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_\lambda^{+\infty} e^{-t} t^n \,dt.$$

En déduire un équivalent de $\int_\lambda^{+\infty} e^{-t} t^n \,dt$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Donner la fonction génératrice G_X de X. Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$? En déduire la probabilité que X soit paire.

3. Une variable aléatoire Y, indépendante de X, suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Calculer la probabilité que XY soit paire.