Corrigés des exercices de la treizième feuille

117

Sans imagination, nommons R chaque rayon de convergence.

1. Clairement, pour tout n, $|a_n| \leqslant 1$. Or le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut 1, donc $R \geqslant 1$.

Comme il y a une infinité de nombres premiers, la suite (a_n) ne tend pas vers 0 donc $\sum a_n$ diverge grossièrement. Alors $R \leqslant 1$.

Ainsi, $R = 1$.

2. (a_n) est une suite récurrente double. Son équation caractéristique est $r^2 = 3\,r + 2$, de racines $\lambda = \frac{1}{2}\,(3 + \sqrt{17}\,)$ et $\mu = \frac{1}{2}\,(3 - \sqrt{17}\,)$. Alors, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha\,\lambda^n + \beta\,\mu^n$. On voit que $\lambda > \frac{7}{2}$. Comme $\lambda\,\mu = -2$, $|\mu| < \frac{4}{7} < 1$. Or la suite (a_n) tend clairement vers $+\infty$, donc $\alpha \neq 0$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\alpha\,\lambda^{n+1} + \beta\,\mu^{n+1}}{\alpha\,\lambda^n + \beta\,\mu^n} \sim \lambda.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence cherché est $R = 1/\lambda = 2/(3 + \sqrt{17}\,)$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant a(n) \leqslant n$. Donc, en notant respectivement R_g et R_d les rayons de convergence des séries $\sum 1\,z^n$ et $\sum n\,z^n$, on a $R_g \geqslant R \geqslant R_d$. Et comme $R_g = R_d = 1$, $R = 1$.

Dans le second cas, on a de même $1 \leqslant a(n) \leqslant n^2$, donc $R = 1$.

4. Pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \ln\left(\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + 1/n}}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

donc

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et d'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.

5. On a $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$. De plus, $\sum z^n/n$ a pour rayon de convergence 1, car on reconnait le développement en série entière de $-\ln(1 - x)$. Donc $R = 1$.

De même, $\sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$, où l'on retrouve une série géométrique, donc $R = e$.

6. La série est lacunaire, donc on utilise la règle de d'Alembert avec le z. Soit $z \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{2n+3}\,z^{2n+3}}{a_{2n+1}\,z^{2n+1}}\right| = \frac{(n+1)\,|z|^2}{2\,(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|z|^2}{4},$$

donc d'après la règle de d'Alembert, si $|z|^2 < 4$, c'est-à-dire $|z| < 2$, la série numérique $\sum a_n\,z^n$ converge absolument, et si $|z|^2 > 4$, c'est-à-dire $|z| > 2$, $\sum a_n\,z^n$ diverge grossièrement. Par définition, $R = 2$.

118

1. Rayon de convergence. Pour tout x réel,

$$\left|\frac{\cos(n\,\theta)}{n!}\,x^n\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!},$$

où l'on reconnait le terme général de la série exponentielle en $|x|$, donc elle converge absolument. Par définition, le rayon de convergence vaut donc $+\infty$.

Somme. Soit $x \in \mathbb{R}$. Cette somme est la partie réelle de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{i\theta}x)^n}{n!} = e^{e^{i\theta}x},$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\theta)}{n!}\,x^n = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$.

2. Rayon de convergence. Comme $\dfrac{1}{2\,n\,(2\,n-1)}$ est une fraction rationnelle en n, le rayon de convergence cherché vaut celui de la série entière $\sum(-1)^n\,x^{2n}$, qui est une série géométrique de raison $-x^2$, donc qui converge si et seulement si $|-x^2| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 1$. Ainsi, le rayon de convergence vaut 1.

Somme. Voici deux calculs de la somme.

Primitivation. On reconnait la somme de cette série entière comme une primitive de

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= -\operatorname{Arctan} x.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in\,]-1, 1[$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{2\,n\,(2\,n-1)} &= -\int_0^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t \\
&= -\Big[t\operatorname{Arctan} t\Big]_0^x + \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= -x\operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2).
\end{aligned}$$

Décomposition. En utilisant les développement en série entière usuels, pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) x^{2n}$$
$$= -x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x^2)^n}{n}$$
$$= -x \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

3. Rayon de convergence. Notons R le rayon de convergence cherché et $a_n = \sin(n\pi/3)$. Comme $|a_n| \leqslant 1$, $R \geqslant 1$. Mais la suite (a_n) ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement et $R \leqslant 1$. Ainsi, $R = 1$.

Somme. Posons $\omega = e^{i\pi/3}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \operatorname{Im}(\omega^n)$. Pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n x^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\omega x}\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1-\overline{\omega} x}{(1-\omega x)(1-\overline{\omega} x)}\right)$$
$$= \frac{\sin(\pi/3)\, x}{1 - 2\cos(\pi/3)\, x + x^2} = \frac{\sqrt{3} x}{2(1-x+x^2)}.$$

4. Rayon de convergence. On a $\dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$; or le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$, donc le rayon de convergence cherché, qui lui est supérieur, vaut aussi $+\infty$.

Somme. Le développement proposé ressemble à celui de ch. Plus précisément, si $x \geqslant 0$, $x = (\sqrt{x}\,)^2$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{x}\,).$$

Et si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x}\,)^2$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x}\,)^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x}\,).$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \cos(\sqrt{-x}\,) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

5. Rayon de convergence. Le rayon de convergence est le même que celui de la série $\sum x^n$, c'est-à-dire 1, car $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ est une fraction rationnelle en n.

Somme. Notons f la somme. Décomposons en éléments simples : pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

Pour $x \in \,]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

On sait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Si $x \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$= \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1.$$

Si $x > 0$, $x = (\sqrt{x}\,)^2$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2n+1}}{2n+1}$$

Par ailleurs, si $u \in \,]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2n}$$
$$= -\ln(1-u) - u + \frac{1}{2} \ln(1-u^2)$$
$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1-u^2}{(1-u)^2} - u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 1.$$

Enfin, si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x}\,)^2$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-(\sqrt{-x}\,)^2)^n}{2n+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x}\,)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et si $u \in \,]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} - u$$
$$= \operatorname{Arctan} u - u,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} (\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}\,) - \sqrt{-x})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}\,) - 1.$$

Finalement, $f(0) = 0$. Si $x > 0$,

$$f(x) = 3 - \ln(1-x) - \frac{1}{x} \ln(1-x)$$
$$- \frac{2}{\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Et si $x < 0$,

$$f(x) = 3 - \ln(1-x) - \frac{1}{x} \ln(1-x)$$
$$- \frac{4}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}\,).$$

6. Rayon de convergence. La suite (F_n) suit une récurrence double, dont l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet pour racines $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $\overline{\varphi} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha\,\varphi^n + \beta\,\overline{\varphi}^n$. Sans difficulté, avec $F_0 = F_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1})$. Comme $|\overline{\varphi}| < 1$, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = \frac{\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2}}{\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $1/\varphi = -\overline{\varphi}$ (car $\varphi\overline{\varphi} = -1$).

Somme. Nommons f la somme. Soit $x \in]\overline{\varphi}, -\overline{\varphi}[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, partant de $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, on a $F_{n+2}\,x^{n+2} - F_{n+1}\,x^{n+2} - F_n\,x^{n+2} = 0$. En sommant, sachant que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2}\,x^{n+2} - x\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1}\,x^{n+1} - x^2\sum_{n=0}^{+\infty} F_n\,x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} F_n\,x^n - x\sum_{n=1}^{+\infty} F_n\,x^n - x^2\sum_{n=0}^{+\infty} F_n\,x^n \\ &= f(x) - x - x\,f(x) - x^2\,f(x), \end{aligned}$$

d'où $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

119

1. Introduisons la fonction auxiliaire

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

de sorte que la somme cherchée vaut $f(1)$, à condition que cela ait un sens, bien-sûr.

Cette fonction est somme d'une série entière lacunaire. Pour trouver son rayon de convergence R, utilisons la règle de d'Alembert, avec le x. Si $x \neq 0$,

$$\left|\frac{x^{3n+3}}{(3n+3)!} \Big/ \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right| = \frac{|x^3|}{(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $\sum x^{3n}/(3\,n)!$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $R = +\infty$. En passant, $f(1)$ a un sens et la série de l'énoncé converge.

Comme somme de série entière, f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver terme à terme : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$

Alors on voit que

$$\begin{aligned} &f(x) + f'(x) + f''(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, f est donc l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = e^x, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Sans difficulté, les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$x \mapsto e^{-x/2}\,(\alpha\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) + \beta\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x)),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Et $x \mapsto \frac{1}{3}\,e^x$ est solution particulière évidente de l'équation complète. Donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \tfrac{1}{3}\,e^x + e^{-x/2}\,(\alpha\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x) + \beta\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x)).$$

Avec les conditions initiales, on obtient finalement que

$$f(x) = \tfrac{1}{3}\,e^x + \tfrac{2}{3}\,e^{-x/2}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x).$$

Alors, la somme cherchée vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = f(1) = \tfrac{1}{3}\,e + \tfrac{2}{3}\,e^{-1/2}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}).$$

2. Introduisons la fonction auxiliaire

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{(1+2\,i)^n}$$

de sorte que la somme cherchée vaut $f(1)$, si cela a un sens.

Cette fonction est somme d'une série entière. Trouvons son rayon de convergence R avec la règle de d'Alembert : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{n+1}{(1+2\,i)^{n+1}} \Big/ \frac{n}{(1+2\,i)^n}\right| \\ &= \frac{n+1}{n\,|1+2\,i|} = \frac{n+1}{n\sqrt{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

donc $R = \sqrt{5}$. En passant, $1 < R$ donc $f(1)$ a un sens et la série de l'énoncé converge.

D'après les propriétés des séries entières, on reconnait que f est la dérivée sur $]-R, R[$ de la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+2\,i)^n}.$$

On voit que g est la somme d'une série géométrique donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$g(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{1+2\,i}}$$

et

$$f(x) = g'(x) = \frac{1}{1+2\,i}\,\frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{1+2\,i}\right)^2}.$$

Alors, la somme cherchée vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+2\,i)^n} = f(1) = \frac{1+2\,i}{(2\,i)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{i}{2}.$$

3. Convergence. La série converge car

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

et la série géométrique $\sum 1/2^n$ converge car $\frac{1}{2} \in [0,1[$.

Somme. Nommons S la somme. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)2^n} \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} \\ &= -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} + 2 \\ &= 2\ln\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + 2 = 2 - 2\ln 2, \end{aligned}$$

où l'on a reconnu le développement en série entière usuel de $x \mapsto \ln(1-x)$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Convergence. Tout d'abord, a_n ne s'annule jamais. D'après la règle de d'Alembert,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1,$$

et la série converge absolument donc converge.

Somme. *Démarche.* Nommons S la somme. Pour la calculer, introduisons une fonction auxiliaire f, somme d'une série entière, telle que par exemple $S = f(1)$. Ensuite, déterminons une relation de récurrence entre les a_n. Utilisons-la pour trouver une équation différentielle dont f est solution. Résolvons-la pour expliciter f. Et le tour est joué !

Fonction auxiliaire. Introduisons la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^{2n},$$

de sorte que $S = f(1)$. Cette fonction est arbitraire, mais il est préférable d'utiliser x^{2n} plutôt que x^n, car l'objectif est de dériver f, et ce sera plus facile ainsi.

Rayon de convergence. Cela dit, la série entière est alors lacunaire, donc il convient d'utiliser la règle de d'Alembert avec le x. Si $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{2(n+1)}}{a_n\, x^{2n}}\right| = \frac{n+1}{2(2n+1)}\, x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{4}.$$

Si $x^2/4 < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$, la série entière converge absolument ; et si $x^2/4 > 1$, c'est-à-dire $|x| > 2$, la série entière diverge grossièrement. Par définition, le rayon de convergence cherché vaut 2, et la fonction f est définie sur $]-2,2[$. C'est raisonnable puisqu'on a choisi f de sorte que $S = f(1)$.

Relation de récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, clairement

$$(R) \qquad 2(2n+1)\, a_{n+1} = (n+1)\, a_n,$$

comme on le voit d'après le calcul pour la convergence.

Équation différentielle. Soit $x \in\,]-2,2[$. Jouons avec les indices. Comme $a_0 = 1$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, x^{2n+2}.$$

Puisque l'on peut dériver la somme d'une série entière terme à terme,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, a_n\, x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)\, a_{n+1}\, x^{2n+1}.$$

Nous tenterons de reconnaitre ces expressions dans les calculs suivants.

Multiplions la relation (R) par x^{2n+2} : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$2(2n+1)\, a_{n+1}\, x^{2n+2} = (n+1)\, a_n\, x^{2n+2}.$$

Alors en sommant, ce qui est possible puisque grâce aux expressions de $f(x)$ et de $f'(x)$, les rayons de convergence des séries entières manipulées valent tous 2, on a

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n+1}\, x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_n\, x^{2n+2}.$$

D'une part,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n+1}\, x^{2n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)\, a_{n+1}\, x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, x^{2n+2} \\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)\, a_{n+1}\, x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, x^{2n+2} \\ &= x\, f'(x) - (f(x) - 1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_n\, x^{2n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{2n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n+2} \\ &= \frac{x^3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, a_n\, x^{2n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n} \\ &= \frac{x^3}{2}\, f'(x) + x^2\, f(x). \end{aligned}$$

Alors,

$$2x\, f'(x) - 2(f(x) - 1) = \frac{x^3}{2}\, f'(x) + x^2\, f(x),$$

ou encore

$$x(x^2-4)\, f'(x) + 2(x^2+2)\, f(x) = 4.$$

Ainsi, f est solution sur $]-2,2[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad x(x^2-4)\, y' + 2(x^2+2)\, y = 4.$$

Résolution de (E). Commençons par la résoudre sur $I_1 =]-2,0[$ ou $I_2 =]0,2[$. Les autres intervalles possibles ne nous intéressent pas car on cherche f.

Soit $k \in \{1,2\}$. Pour tout $x \in I_k$,

$$\frac{x^2+2}{x\,(x^2-4)} = \frac{3}{2\,(x-2)} + \frac{3}{2\,(x+2)} - \frac{1}{x}$$

donc

$$\int \frac{x^2+2}{x\,(x^2-4)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x|$$
$$= \frac{3}{4}\ln|x^2-4| - \frac{1}{2}\ln|x| = \frac{3}{4}\ln(4-x^2) - \frac{1}{2}\ln|x|.$$

Alors, l'ensemble des solutions sur I_k de l'équation homogène associée à (E) est engendré par la fonction

$$x \mapsto \exp\left(-2\int \frac{x^2+2}{x\,(x^2-4)}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{3}{2}\ln(4-x^2) + \ln|x|\right) = \frac{|x|}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

Puisque f est solution de (E) sur $]-2,2[$, elle l'est en particulier sur I_2. D'après la méthode de variation de la constante, elle s'écrit alors sur I_2,

$$f(x) = \alpha_2(x)\,\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}},$$

où α_2 est une fonction dérivable sur I_2. En reportant dans (E),

$$x\,(x^2-4)\,\alpha_2'(x)\,\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}} = 4$$

c'est-à-dire

$$\alpha_2'(x) = -4\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}.$$

Alors, en primitivant par parties, ce qui est permis puisque les fonctions en jeu sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I_2,

$$\alpha_2(x) = -4\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + 4\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + 4\int \frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + 4\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{2} + \beta_2.$$

Ici, il ne faut pas oublier la constante d'intégration β_2, car nous cherchons spécifiquement f, et nous ne savons pas encore quelle constante conviendra. Ainsi,

$$f(x) = 4\,\frac{x\,\mathrm{Arcsin}(x/2) + \sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^{3/2}} + \beta_2\,\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

Sur le même principe, f est solution de (E) sur I_1. Comme le signe de x n'est pas intervenu dans les calculs précédents, sur I_1 on peut écrire

$$f(x) = 4\,\frac{x\,\mathrm{Arcsin}(x/2) + \sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^{3/2}} + \beta_1\,\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

Plutôt que de tenter un recollement fastidieux, disons simplement que f est une fonction paire, ce qui est le cas de la première partie des expressions ci-dessus, mais pas des termes qui contiennent les constantes. Ainsi, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ et sur $]-2,2[$,

$$f(x) = 4\,\frac{x\,\mathrm{Arcsin}(x/2) + \sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

Somme. Finalement,

$$S = f(1) = 4\,\frac{\mathrm{Arcsin}(1/2) + \sqrt{3}}{\sqrt{3}^{\,3/2}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{4}{3}.$$

Épilogue. Ouf !

120

Sans imagination, nommons f chaque fonction.

1. Dérivons f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{1+x+x^2}.$$

Posons $j = e^{2i\pi/3}$ et décomposons en éléments simples : sachant que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x-j)\,(x-j^2)} = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}$$
$$= -\frac{1}{j\,(1-j^2x)} - \frac{1}{j^2\,(1-j\,x)}.$$

Cette dernière écriture a été choisie pour les développements en série entière qui suivent. Comme $|j| = |j^2| = 1$, ils ont pour rayon de convergence 1 : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = -j^2\sum_{n=0}^{+\infty}(j^2x)^n - j\sum_{n=0}^{+\infty}(j\,x)^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}(j^n + j^{2n})\,x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n.$$

Alors f admet un développement en série entière, également de rayon de convergence 1, qui s'obtient en intégrant le précédent terme à terme : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

où l'on n'a pas oublié la constante d'intégration qui vaut $f(0) = 0$.

2. Comme primitive de la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$, la fonction Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc son carré $f = \mathrm{Arcsin}^2$ l'est aussi. Pour trouver son développement en série entière, cherchons une équation différentielle vérifiée par f. Elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}},\quad f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2\,x\,\mathrm{Arcsin}\,x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Alors, f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-x^2)\,y'' - x\,y' = 2.$$

Cette équation est du premier ordre en y', donc il vaut mieux chercher le développement en série entière de f'. Comme f' est impaire, on peut écrire, pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n-1},$$
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\, a_n x^{2n-2}.$$

En reportant dans (E), pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\, a_n x^{2n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\, a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n} = 2.$$

Translatons l'indice de la première somme, et regroupons les suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n+1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, a_n x^{2n} = 2$$
$$\iff a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((2n+1)\, a_{n+1} - 2n\, a_n\big) x^{2n} = 2.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 2$, $a_1 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$, $(2n+1)\, a_{n+1} - 2n\, a_n = 0$. Donc pour $n \geqslant 0$,

$$a_n = \frac{2n-2}{2n-1} a_{n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} a_{n-2} = \frac{2(n-1)\,2(n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3} a_1 = \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} 2.$$

En intégrant, sachant que $f(0) = 0$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} x^{2n}.$$

Le rayon de convergence vaut bien-sûr 1.

3. Tout d'abord, on voit clairement que f n'est pas définie en 0. Mais, pour x proche de 0,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \mathrm{o}(x^2)\right) = 1 + \mathrm{o}(1),$$

donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$, ce que l'on fait dorénavant.

On peut écrire, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{g(x^2) - g(-x^2)}{x^2},$$

où $g : u \mapsto \sqrt{1+u}$. On sait que pour $u \in]-1,1[$,

$$g(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} u^n,$$

donc si $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} x^{2n}\right) = \frac{2}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{2n+1} x^{2(2n+1)} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{2n+1} x^{4n}.$$

Constatons que puisque $f(0) = 1$, ce développement est valable sur tout $]-1,1[$. Bien-sûr, le rayon de convergence vaut 1.

121 — AM

Cherchons les solutions développables en série entière de cette équation différentielle (E).

Analyse. Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière de (E) : on a

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n,$$
$$y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, n\, a_{n+1} x^{n-1}.$$

En reportant dans (E), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, n\, a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3} = 0$$
$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, n\, a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n - 4 \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3} x^n = 0$$
$$\iff 3a_1 + 8a_2 x + 15 a_3 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} [(n+1)(n+3)\, a_{n+1} - 4a_{n-3}]\, x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de 0, cela équivaut à $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et pour $n \geqslant 3$,

$$(n+1)(n+3)\, a_{n+1} = 4a_{n-3}$$

donc pour $p \geqslant 0$, $a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$ et

$$a_{4p} = \frac{a_{4p-4}}{(2p+1)(2p)} = \frac{a_0}{(2p+1)!}.$$

Finalement, $y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$.

Synthèse. Soit $\varphi : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$. Pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{x^{4p+4}}{(2p+3)!} \Big/ \frac{x^{4p}}{(2p+1)!} \right| = \frac{x^4}{(2p+3)(2p+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$ et φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Fin de la résolution. Notons I l'un des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$. Sur I,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}.$$

Alors, on imagine que $\psi : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x^2)}{x^2}$ est également solution, ce que l'on vérifie aisément. Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\left\{x \mapsto \alpha \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{x^2} + \beta \frac{\operatorname{ch}(x^2)}{x^2},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.\right\}$$

122 — **AM**

Supposons que l'équation (1) admette une solution y développable en série entière de rayon de convergence R non nul. Alors, pour tout x de $]-R, R[$,

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}.$$

En reportant dans l'équation (1), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

ce qui donne $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(n+1)^2}$ pour tout $n \geqslant 0$. Par une récurrence immédiate, on en tire $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = +\infty$.

Ainsi, l'équation (1) admet des solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Ces solutions s'écrivent

$$\varphi : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n.$$

123 — **CCP**

1. La fraction f se décompose sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{3-x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

En multipliant cette égalité par $3-x$ et en faisant $x = 3$, on obtient $a = \frac{1}{16}$. En multipliant par $(x+1)^2$ et en faisant $x = -1$, $c = \frac{1}{4}$. Enfin, en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, $-a + b = 0$, d'où $b = \frac{1}{16}$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{16(3-x)} + \frac{1}{16(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}.$$

Sur $]-1, 3[$, f est continue donc elle y admet des primitives. La seule qui s'annule en 1 est définie pour tout $x \in\,]-1, 3[$ par

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{16}\ln(3-x) + \frac{1}{16}\ln(x+1) - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. En utilisant les séries géométriques usuelles, pour tout $x \in\,]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{48\,(1-\frac{x}{3})} + \frac{1}{16\,(1+x)} - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{48}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n \\ &= \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n(4n+5)\right)}_{a_n} x^n. \end{aligned}$$

Et comme ce développement n'est valide que pour $x \in\,]-1, 1[$, son rayon de convergence est 1.

3. La fonction G est développable en série entière et pour tout $x \in\,]-1, 1[$,

$$G(x) = G(0) + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Comme ce développement en série entière est aussi la série de Taylor de G en 0, le coefficient de x^3 est

$$\frac{G^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{16}\frac{a_2}{3},$$

d'où

$$G^{(3)}(0) = \frac{1}{8} a_2 = \frac{44}{27}.$$

124 — **CCP**

1. Oui, c'est classique, par exemple avec un équivalent de sinus en 0.

2. À vrai dire, f est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

et ce dernier développement est encore valide en 0, donc f est développement en série entière sur $\mathbb{R}$, d'où sa classe $\mathscr{C}^\infty$.

Alors F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme primitive de la précédente.

125

1. Pour commencer, vue la définition de S, disons que N est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $t \in [-1, 1]$. Par définition,

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S = k)\, t^k.$$

Par ailleurs, d'après la formule des probabilités totales, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(S = k \,|\, N = n)\, P(N = n),$$

car bien-sûr, la famille $(N=n)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'évènements. Alors,

$$\begin{aligned}G_S(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} P(S=k\,|\,N=n)\,P(N=n)\right)t^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} P(S=k\,|\,N=n)\,P(N=n)\,t^k\right).\end{aligned}$$

Grâce à ces calculs, sachant que le rayon de convergence de G_S est supérieur ou égal à 1, on en déduit que pour tout $k\geqslant 0$, la famille

$$\big(P(S=k\,|\,N=n)\,P(N=n)\,t^k\big)_{n\geqslant 1}$$

est sommable, et que la famille

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} P(S=k\,|\,N=n)\,P(N=n)\,t^k\right)_{k\geqslant 0}$$

l'est aussi. Donc le théorème de Fubini s'applique et permet la permutation suivante :

$$\begin{aligned}G_S(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k\,|\,N=n)\,P(N=n)\,t^k\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k\,|\,N=n)\,t^k\right)P(N=n).\end{aligned}$$

En outre, pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k\,|\,N=n)\,t^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j=k\right)t^k\\ &= G_{\sum_{k=1}^{n} X_j}(t)=\prod_{j=1}^{n} G_{X_j}(t)=(G_X(t))^n,\end{aligned}$$

car les X_j sont indépendantes et suivent la même loi de fonction génératrice G_X. Donc

$$G_S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\,(G_X(t))^n=G_N(G_X(t)),$$

d'où $G_S=G_N\circ G_X$.

2. Alors, puisque N et les X_n admettent une espérance, G_N et G_X sont dérivables en 1, donc G_S aussi, par composition, donc S admet une espérance et l'on a

$$E(S)=G_S'(1)=G_X'(1)\,G_N'\circ G_X(1).$$

Or $G_X'(1)=E(X_1)$, puisque G_X est la fonction génératrice de X_1. De plus $G_X(1)=1$, par définition d'une fonction génératrice, donc

$$G_N'\circ G_X(1)=G_N'(1)=E(N).$$

Finalement, $E(S)=E(X_1)\,E(N)$.

126 — **CCP**

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'une part,

$$P(X\leqslant n)=\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}.$$

D'autre part, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n!}\Big[-e^{-t}\,t^n\Big]_\lambda^{+\infty}+\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,n\,t^{n-1}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^{n-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Bien-sûr, cette intégration par parties est licite : en effet, la fonction $t\mapsto e^{-t}\,t^a$ est continue et intégrable sur $[\lambda,+\infty[$ car $e^{-t}\,t^a \ll_{+\infty} e^{-t/2}$, donc les deux intégrales ont un sens, où a vaut respectivement n et $n-1$; alors le crochet en a un aussi. Et l'égalité prouve la transmission d'une récurrence dont l'initialisation est évidente :

$$\frac{1}{0!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^0\,\mathrm{d}t=e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^0}{0!}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}$$

et donc

$$P(X\leqslant n)=\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t.$$

Les évènements $(X\leqslant n)$ forment une suite croissante dont la réunion est l'univers, donc d'après le théorème de la continuité croissante,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X\leqslant n)=P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X\leqslant n)\right)=P(X(\Omega))=1.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t=1,$$

ce qui signifie que

$$\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t\sim n!$$

2. D'après le cours, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$. On a $G_X(1)=1$ et $G_X(-1)=e^{-2\lambda}$.

Alors, la probabilité que X soit paire est

$$\begin{aligned}P(X\in 2\,\mathbb{N}) &= P\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty}(X=2\,n)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2\,n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n}}{(2\,n)!}=e^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda)\\ &= \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}=\frac{G_X(1)+G_X(-1)}{2}.\end{aligned}$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(XY\in 2\,\mathbb{N}) &= P(XY\in 2\,\mathbb{N}\,|\,Y=1)\,P(Y=1)\\ &\quad+P(XY\in 2\,\mathbb{N}\,|\,Y=2)\,P(Y=2)\\ &= P(X\in 2\,\mathbb{N})\,\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}=\frac{3\,G_X(1)+G_X(-1)}{4}.\end{aligned}$$