Quatorzième feuille d'exercices

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

127 ————— **ENSEA**

Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\int_0^1 P(t) t^n dt|$.

128 ————— **CCP**

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, et pour un polynôme $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, posons

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ et } N_\infty(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Prouver que N_1 et N_∞ sont des normes sur E .

129 ————— **CS**

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$N(f) = \sup_{[0,1]} |f'' + 2f' + f|.$$

2. Soient $f \in E$ et $h(t) = f(t)e^t$. Montrer que

$$\forall t \in [0, 1], h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u)du.$$

3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour toute $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq aN(f)$.

130 —————

Considérons $E = \mathbb{R}_2[X]$ et R , l'ensemble des polynômes de E scindés sur $\mathbb{R}$.

1. Si $P = aX^2 + bX + c$ est dans E , on pose

$$\|P\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E .

2. L'ensemble R est-il ouvert ?

131 —————

Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que l'ensemble $A = \{(u, v) \in E^2 \mid (u, v) \text{ est libre}\}$ est un ouvert de E^2 . On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

132 ————— **MP**

Soit α un réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$.

133 ————— **WP**

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni des normes usuelles 1 et ∞ . Soit $f \in E$.

1. Étudier la convergence de la suite de terme général $f_n : x \mapsto x^n f(x)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

2. Que se passe-t-il dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

3. Que conclure ?

134 —————

Soient $E = \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}[X]$.

Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \int_0^{1/2} |f(t)| dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \sum_{k=1}^n k X^{k-1}$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\|P_n\|$.

3. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{(1-X)^2}$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

135 —————

Considérons $E = \mathbb{R}^2$ et

$$f : E \rightarrow E, (x, y) \mapsto (2x + y, x - y).$$

Montrer que f est linéaire et continue sur E .

136 —————

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall P \in \mathbb{C}_n[X], |P(z)| \leq k \sup_{[-1,1]} |P|.$$

137 ————— **WP**

Soit E l'espace des fonctions bornées et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme ∞ . Montrer que l'application

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt$$

est une forme linéaire continue sur E .