

Corrigés des exercices de la quatorzième feuille

127

ENSEA

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| \leq \int_0^1 |P(t)| t^n dt \leq \int_0^1 |P(t)| dt,$$

donc la borne supérieure existe et est positive. L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

Soit $P \in E$ tel que $N(P) = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 P(t) t^n dt = 0$. Comme P est combinaison linéaire de monômes, il s'ensuit que $\int_0^1 P(t) P(t) dt = 0$. Comme P^2 est continue et positive sur $[0, 1]$, $P = 0$ sur $[0, 1]$, donc $P = 0$ comme polynôme. Ainsi, pour tout $P \neq 0$, $N(P) > 0$.

Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} N(\lambda P) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 \lambda P(t) t^n dt \right| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda| \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| \\ &= |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| = |\lambda| N(P). \end{aligned}$$

Soient P et Q dans E et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 (P(t) + Q(t)) t^n dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 P(t) t^n dt + \int_0^1 Q(t) t^n dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 P(t) t^n dt \right| + \left| \int_0^1 Q(t) t^n dt \right| \\ &\leq N(P) + N(Q), \end{aligned}$$

donc $N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$.

Finalement, N est bien une norme sur E .

128

CCP

Constatons d'abord que l'écriture du polynôme a un sens : comme les coefficients de P sont nuls à partir d'un certain rang, la somme est en réalité finie. Mais l'écriture est confortable car elle ne nécessite pas de connaître le degré de P .

NORME N_1 . * Soit $P \in E$. L'écriture de $N_1(P)$ représente une somme finie, donc elle a un sens, et $N_1(P)$ est positive.

* Si $P = 0$, bien-sûr, $N_1(P) = 0$. Réciproquement, si $N_1(P) = 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = 0$. Comme il s'agit d'une somme de réels positifs, ils sont tous nuls. Cela signifie que les coefficients de P sont nuls, donc $P = 0$.

* Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} N_1(\lambda P) &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |a_n| \\ &= |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = |\lambda| N_1(P). \end{aligned}$$

* Enfin, si $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \in E$,

$$P + Q = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) X^n,$$

donc

$$N_1(P + Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n|.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \end{aligned}$$

d'où $N_1(P + Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$.

* Finalement, N_1 est bien une norme sur E .

* Redisons-le : toutes les sommes manipulées étaient finies, donc leur existence était acquise.

NORME N_∞ . * Soit $P \in E$. Comme il n'a qu'un nombre fini de coefficients éventuellement non nuls, ils sont majorés et la borne supérieure est bien définie, qui est d'ailleurs un maximum. Et $N_\infty(P)$ a un sens et est positive.

* Si $P = 0$, $N_\infty(P) = 0$. Réciproquement, si $N_\infty(P) = 0$, cela signifie que la plus grande valeur absolue des coefficients de P est nulle, donc les autres le sont aussi, et P est nul.

* Si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N_\infty(\lambda P) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda a_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda| |a_n| \\ &= |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = |\lambda| N_\infty(P). \end{aligned}$$

* Enfin, si $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \in E$,

$$N_\infty(P + Q) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + b_n|.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q).$$

Cela signifie que le nombre $N_\infty(P) + N_\infty(Q)$ est un majorant de l'ensemble des coefficients $|a_n + b_n|$, donc il est plus grand que la borne supérieure de cet ensemble, qui en est le plus petit des majorants. Autrement dit,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + b_n| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q),$$

ou encore, $N_\infty(P + Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$.

* Finalement, N_∞ est bien une norme sur E .

* Redisons-le : toutes les familles de coefficients ne comportaient qu'un nombre fini de coefficients éventuellement non nuls, donc les bornes supérieures existaient bien.

129

CS

1. Soit $f \in E$: f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ donc $f'' + 2f' + f$ est continue sur $[0, 1]$; comme telle, cette fonction est bornée et atteint ses bornes. Alors sa norme infinie est définie :

$$N(f) = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$$

est bien définie. Avec cette expression, on voit que pour tout $f \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$. Et par linéarité de la dérivation, pour tout $g \in E$,

$$\begin{aligned} N(f + g) &= \|(f'' + 2f' + f) + (g'' + 2g' + g)\|_\infty \\ &\leq \|f'' + 2f' + f\|_\infty + \|g'' + 2g' + g\|_\infty \\ &= N(f) + N(g). \end{aligned}$$

Enfin, si $N(f) = 0$, f vérifie

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = 0, \\ f(0) = 0, f'(0) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy : il admet une unique solution, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Comme la solution nulle est évidente, c'est la seule : $f = 0$. Ainsi, N est bien une norme sur E .

2. Comme $f \in E$, h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, et pour tout $t \in [0, 1]$, $h'(t) = (f'(t) + f(t))e^t$ et $h''(t) = (f''(t) + 2f'(t) + f(t))e^t$. En passant, $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$. En appliquant à h la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 en 0, on obtient

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0) + th'(0) + \int_0^t (t-u)h''(u)du \\ &= \int_0^t (t-u)h''(u)du. \end{aligned}$$

3. Soit $f \in E$. Pour majorer $\|f\|_\infty$, majorons $|f(t)|$ pour $t \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} |f(t)| &= e^{-t}|h(t)| = e^{-t}\left|\int_0^t (t-u)h''(u)du\right| \\ &\leq e^{-t}\int_0^t (t-u)|f''(u) + 2f'(u) + f(u)|e^u du \\ &\leq e^{-t}N(f)\int_0^t (t-u)e^u du \\ &= e^{-t}N(f)(e^t - 1 - t) \\ &= N(f)(1 - e^{-t} - te^{-t}). \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto 1 - e^{-t} - te^{-t}$ est clairement croissante sur $[0, 1]$, donc $1 - e^{-t} - te^{-t} \leq 1 - 2e^{-1}$. Alors,

$$|f(t)| \leq N(f)(1 - 2e^{-1}),$$

d'où

$$\|f\|_\infty \leq N(f)(1 - 2e^{-1}).$$

130

1. $\|P\|$ est la norme euclidienne usuelle du triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E .

2. Considérons l'application

$$\Delta \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & \Delta(P) = b^2 - 4ac \end{vmatrix}$$

de sorte que $R = \{P \in E \mid \Delta(P) \geq 0\}$. L'application Δ est polynomiale en a, b et c , donc elle est continue sur E . Comme $R = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et que $\mathbb{R}_+$ est fermé, R est fermé, et donc pas ouvert.

131

Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a $|(u|v)| \leq \|u\|\|v\|$ et il y a égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée, donc (u, v) est libre si et seulement si $|(u|v)| < \|u\|\|v\|$. Considérons donc

$$\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \|u\|\|v\| - |(u|v)|,$$

de sorte que $A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il reste à prouver que φ est continue sur E^2 .

Sur E^2 , choisissons $\|(u, v)\|_\infty = \max(\|u\|, \|v\|)$, ce qui est égal puisque E^2 est de dimension finie.

La fonction $\alpha : (u, v) \mapsto \|u\|$ est continue sur E^2 car pour $(u, v) \in E^2$ et $(u', v') \in E^2$,

$$|\|u\| - \|u'\|| \leq \|u - u'\| \leq \|(u, v) - (u', v')\|_\infty$$

ce qui signifie qu'elle est 1-lipschitzienne donc continue sur E .

La fonction $(u, v) \mapsto (u|v)$ est continue sur E^2 car c'est un polynôme de degré deux en les coordonnées de u et v dans une base fixée quelconque. Comme la fonction $z \mapsto |z|$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\beta : (u, v) \mapsto |(u|v)|$ est continue sur E^2 .

Alors la fonction $\varphi : (u, v) \mapsto \alpha(u)\alpha(v) - \beta(u, v)$ est continue sur E^2 .

132

MP

Comme $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, la limite équivaut à prendre la limite des coefficients. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de calculer A_n^n . Les colonnes de A_n sont orthogonales, et l'on a

$$A_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{n}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} & \frac{-\alpha}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} & \frac{n}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} \end{pmatrix} = r_n R_n$$

et $A_n^n = r_n^n R_n^n$. D'une part,

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'autre part, en posant $\theta_n = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}}$,

$$R_n = \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$$

est la matrice de la rotation d'angle θ_n et R_n^n est celle d'angle $n\theta_n$. Or, $\lim n\theta_n = \alpha$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^n = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Finalement, $\lim A_n^n = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

133

WP

1. Pour tout $n \geq 0$,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 t^n dt = \frac{\|f\|_\infty}{n+1},$$

donc la suite numérique $(\|f\|_1)_{n \geq 0}$ tend vers 0, autrement dit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

2. Mais elle ne converge pas forcément vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. En effet, en prenant par exemple la fonction $f : x \mapsto 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1$.

3. Alors les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, car il existe une suite de E qui converge dans $(E, \|\cdot\|_1)$ et pas dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

134

1. On reconnaît la norme 1 usuelle sur $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E .
2. Sans difficulté, $\|P_n\| = 1 - 1/2^n$.
3. Soit $F = 1/(1 - X)^2$. Voici deux preuves.

PREUVE DIRECTE. La formule de Taylor avec reste intégral pour F en 0 à l'ordre $n - 1$ donne, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t) dt.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F^{(k)} = \frac{(k+1)!}{(1-X)^{k+2}},$$

donc

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k + n(n+1) \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{n+2}} dt,$$

où l'on voit que la somme vaut $P_n(x)$ et que le reste est positif pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Alors,

$$\begin{aligned} \|P_n - F\| &= \int_0^{1/2} (F(t) - P_n(t)) dt \\ &= \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^{1/2} - \|P_n\| = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim \|P_n - F\| = 0$, donc la suite (P_n) converge vers F dans E .

PREUVE SAVANTE. On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k,$$

et en dérivant ce développement en série entière,

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}.$$

Or cette série entière converge normalement sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc elle y converge uniformément. On peut alors permuter la somme et l'intégrale : autrement dit, $\lim \|P_n - F\| = 0$ et l'on retrouve le résultat.

135

La fonction f est clairement linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Comme E est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes : choisissons arbitrairement de travailler avec la norme infinie.

Pour montrer que f est continue, montrons qu'elle est lipschitzienne. Il suffit donc de montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|f(x, y)\|_\infty \leq k \|(x, y)\|_\infty$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: posons $m = \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. On a $|2x + y| \leq 2|x| + |y| \leq 2m + m = 3m$ et $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2m$, donc

$$\|f(x, y)\|_\infty = \max\{|2x + y|, |x - y|\} \leq 3m$$

et f est bien lipschitzienne.

136

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $P \mapsto P(z)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$, donc elle est y continue : c'est ce que traduit l'inégalité demandée.

137**WP**

La fonction $g : t \mapsto f(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En outre, comme f est bornée, pour tout $t \geq 0$, $|g(t)| \leq \|f\|_\infty e^{-t}$. Or la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc g aussi. Ainsi, φ est bien définie.

Par linéarité de l'intégrale, φ est linéaire. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \int_0^{+\infty} |g(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} \|f\|_\infty e^{-t} dt \\ &= \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que φ est 1-lipschitzienne, donc elle est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.