Quinzième feuille d'exercices

ESPACES PRÉHILBERTIENS

138 ————— **CCP**

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.
2. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner sa dimension.
3. Calculer $d(1, F)$.

139 ————— **CCP**

1. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, montrer que l'on définit un produit scalaire en posant $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $P = 1 + X + X^2$ sur $F = \{Q \in E \mid Q'(0) = 0\}$.

140 ————— **CCP**

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

141 ————— **CCP**

Dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ euclidien usuel, on considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille (I_3, A) est orthogonale.
2. Donner le projeté orthogonal de la matrice M sur le plan engendré par cette famille.

142 ————— **CS**

Déterminer la borne inférieure

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \sqrt{\int_{-1}^1 (t^3 + at^2 + bt + c)^2 dt}.$$

On pourra interpréter ce nombre comme la distance d'un point à un sous-espace.

143 ————— **MP**

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\inf \left\{ \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2 \mid M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \right\}.$$