Corrigés des exercices de la quinzième feuille

138 — **CCP**

1. Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$. L'application $(\cdot\,|\,\cdot)$ est clairement bilinéaire symétrique. De plus, pour $P \in E$,

$$(P\,|\,P) = \sum_{k=0}^{n} (P^{(k)}(1))^2 \geqslant 0.$$

Enfin, si $(P\,|\,P) = 0$, comme il s'agit d'une somme de réels positifs, ils sont tous nuls, donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)}(1) = 0$. Et d'après la formule de Taylor pour P en 1,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\,(X-1)^k = 0.$$

L'application $(\cdot\,|\,\cdot)$ est bien un produit scalaire.

2. Où l'on voit que, pour tout $P \in E$, $P \in F$ si et seulement si $(1\,|\,P) = 0$, donc $F = \mathrm{Ker}(1\,|\,\cdot)$ et F est un hyperplan de E, car $(1\,|\,\cdot)$ est une forme linéaire non nulle. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension n.

3. Alors, $E = F \oplus F^\perp$, et l'on a compris que $1 \perp F$ donc $F^\perp = \mathbb{R}\,1$. Alors, puisque les dérivées du polynôme 1 sont nulles à partir du rang 1,

$$d(1, F) = \|1\| = \sqrt{1} = 1.$$

139 — **CCP**

1. Oui, c'est du cours...

2. L'application $Q \mapsto Q'(0)$ est une forme linéaire non nulle, donc F est un hyperplan de E. Comme $\dim E = 3$, $\dim F = 2$. Clairement, $1 \in F$ et $X^2 \in F$, donc $F = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Or, 1 et X^2 sont pairs et X est impair, donc $\langle 1, X\rangle = \langle X^2, X\rangle = 0$ donc $X \perp F$. Donc en notant $D = \mathbb{R}\,X$, $F = D^\perp$ et $E = F \oplus D$. Or

$$P = \underbrace{1 + X^2}_{\in F} + \underbrace{X}_{\in D}.$$

Par unicité de la décomposition de P dans la somme directe, le projeté de P sur F parallèlement à D est $1 + X^2$. Et comme $F \perp D$, c'est le projeté orthogonal.

140 — **CCP**

Notons $\cdot$ le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^3$, (i, j, k) sa base canonique et p le projecteur orthogonal sur le plan P. Un vecteur normal à P est $n = (1, -2, 1)$. Le projeté orthogonal de i sur $\mathbb{R}\,n$ est

$$\frac{i \cdot n}{n \cdot n}\,n = \tfrac{1}{6}\,n,$$

donc son projeté orthogonal sur P est

$$p(i) = i - \frac{i \cdot n}{n \cdot n}\,n = (\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{6}).$$

De même, $p(j) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $p(k) = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$. Finalement, la matrice de p dans (i, j, k) est

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

141 — **CCP**

1. On a $(I_3\,|\,A) = \mathrm{Tr}(I_3^\top A) = \mathrm{Tr}(A) = 0$ donc $I_3 \perp A$.

2. Posons $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Pour trouver le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$, il suffit de connaitre une base orthonormée de $\mathscr{P}$. On a $(I_3|I_3) = \mathrm{Tr}(I_3) = 3$ et $(A\,|\,A) = \mathrm{Tr}(A^\top A) = 3$. Alors une base orthonormée de $\mathscr{P}$ est $(\frac{1}{\sqrt{3}} I_3, \frac{1}{\sqrt{3}} A)$. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est donc la matrice

$$(\tfrac{1}{\sqrt{3}} I_3\,|\,M)\,\tfrac{1}{\sqrt{3}} I_3 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}} A\,|\,M)\,\tfrac{1}{\sqrt{3}} A = \tfrac{1}{3}\,(I_3 + A).$$

142 — **CS**

Plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni du produit scalaire $(P\,|\,Q) = \int_{-1}^{1} PQ$. Alors la borne inférieure cherchée est la distance de X^3 à $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Plutôt que de chercher une base orthonormée de F, cherchons son orthogonal. Puisque F est un hyperplan de E, $F^\perp$ est une droite $\mathbb{R}\,N$ où N est normal à F. Et il est plus facile de projeter sur une droite que sur un plan.

Le polynôme N ne peut pas être de degré inférieur ou égal à 2, sinon il serait dans F. Choisissons

$$N = X^3 + p\,X^2 + q\,X + r.$$

On a

$$\begin{array}{rcr} (1\,|\,N) = 0 & \text{donc} & \frac{2}{3}\,p + 2\,r = 0\,; \\ (X\,|\,N) = 0 & \text{donc} & \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\,q = 0\,; \\ (X^2\,|\,N) = 0 & \text{donc} & \frac{2}{5}\,p + \frac{2}{3}\,r = 0. \end{array}$$

Alors $p = r = 0$, $q = -\frac{3}{5}$ et $N = X^3 - \frac{3}{5}\,X$.

L'intérêt de ce choix est que l'on voit immédiatement que $X^3 = N + \frac{3}{5}\,X$, où $\frac{3}{5}\,X \in F$. Donc le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}\,N$ est N et la distance de X^3 à F est $\|N\| = \frac{2}{35}\sqrt{14}$. En outre, elle est atteinte pour $a = c = 0$ et $b = -\frac{3}{5}$.

143 — **MP**

Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel, on reconnait le carré de la distance de la matrice A à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Or, le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques, donc la distance cherchée est la norme de la partie antisymétrique de A :

$$\begin{aligned} d(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^2 &= \|\tfrac{1}{2}\,(A - {}^tA)\|^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji})^2. \end{aligned}$$