Seizième feuille d'exercices

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

144 ————— **TPE**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , posons $S_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_i) | e_j)^2$. Montrer que $S_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.

145 ————— **CCP**

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice dans cette base de la rotation R définie par $R(e_1) = -e_2$ et $R(u) = u$, avec $u = e_1 - e_2 + e_3$.

146 ————— **CCP**

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), R^2 = A.$$

147 —————

Que dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} ?$$

148 —————

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$, considérons l'application

$$\Phi : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'.$$

Montrer que $\Phi \in \mathcal{S}(E)$ et déterminer son spectre.

149 ————— **MP**

Que dire de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T A = I_n$?

150 ————— **CCP**

Effectuer la réduction orthogonale de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

151 ————— **CCP**

Considérons un espace euclidien E de dimension 4, une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $u \in O(E)$.
2. On note a le premier vecteur de $\mathcal{B}$. Montrer que le plan $P = \text{Vect}(a, u(a))$ est stable par u .
3. Montrer que le plan $Q = P^\perp$ est stable par u .

152 ————— **CS**

Pour des réels a, b et c non tous nuls, soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $I_3 + A$ est inversible.
2. Montrer que $(I_3 - A)(I_3 + A)^{-1} \in SO(3)$.
3. Donner les caractéristiques de cette matrice.

153 ————— **CCP**

Considérons un espace euclidien E , une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ quelconque de E et l'application

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^n (e_k | x) e_k.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}(E)$ tel que $g^2 = f^{-1}$.
3. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E . On pourra introduire les $u_i = f^{-1}(e_i)$.