Corrigés des exercices de la seizième feuille

144 — TPE

Interprétation matricielle. Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(u(e_i)\,|\,e_j)$ est la coordonnée de $u(e_i)$ sur le vecteur e_j. En posant $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = (a_{ij})$, on a donc $(u(e_i)\,|\,e_j) = a_{ji}$ et

$$S_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ji}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 = \mathrm{Tr}(A^\top A).$$

Changement de base. Considérons une autre base orthonormée, $\mathscr{C}$, et posons $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$: on a $S_{\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Tr}(B^\top B)$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$: comme ce sont des bases orthonormées, $P \in O(n)$, donc $P^{-1} = P^\top$. On a $A = P\,B\,P^{-1} = P\,B\,P^\top$, donc

$$A^\top A = P\,B^\top P^\top P\,B\,P^\top = P\,B^\top B\,P^{-1}.$$

Ainsi, $A^\top A$ et $B^\top B$ sont semblables et ont même trace, donc $S_{\mathscr{B}}(u) = S_{\mathscr{C}}(u)$.

145 — CCP

Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ la matrice cherchée, dont on note C_1, C_2 et C_3 les colonnes.

Comme $R(e_1) = -e_2$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $M \in O(3)$, les colonnes sont orthogonales deux à deux. En particulier, $C_1^\top C_2 = C_1^\top C_3 = 0$, c'est-à-dire $e = h = 0$.

Comme R est une rotation, elle envoie une base orthonormée directe sur une base orthonormée directe, donc $C_1 \wedge C_2 = C_3$ d'où $g = -f$ et $i = d$.

Commentaire. Cette façon de traduire que R est une rotation est plus efficace que de dire $\det(M) = 1$.

Comme $R(u) = u$, $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} 0 & d & -f \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & f & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d-f \\ -1 \\ -f+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $d = 0$, $f = -1$.

Finalement, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

146 — CCP

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. On peut écrire $A = \Omega\,D\,\Omega^\top$ où $\Omega \in O(n)$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\lambda_i \geqslant 0$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $R = \Omega\,\Delta\,\Omega^\top$, on voit que $R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $R^2 = A$.

Unicité. Considérons $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$ et montrons que $S = R$.

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel, introduisons les endomorphismes a, r et s canoniquement associés à A, R et S. Comme $A = R^2 = S^2$, A et R commutent, et A et S commutent. Donc a et r commutent et a et s aussi. Alors, les sous-espaces propres de a sont stables par r et par s. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel est orthonormée, donc a, r et s sont autoadjoints. Alors, les endomorphismes induits par r et s sur chaque sous-espace propre de a sont encore autoadjoints.

Plus précisément, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Pour alléger les écritures, posons $F = E_\lambda(a)$ et $p = \dim(F)$. Notons u, v et w les endomorphismes induits par a, r et s sur F. On vient de dire qu'ils sont dans $\mathscr{S}(F)$, et même dans $\mathscr{S}^+(F)$, par hypothèse pour u et w, et par construction pour v. On sait que u est l'homothétie de rapport λ de F. Et par construction, v est celle de rapport $\sqrt{\lambda}$.

En outre, w est diagonalisable dans une base orthonormée de F : choisissons une telle base $\mathscr{B}$. Considérons les matrices U, V et W de u, v et w dans la base $\mathscr{B}$. Par nature, $U = \lambda\,I_p$, et par construction $V = \sqrt{\lambda}\,I_p$. On a vu que W est diagonale, avec des coefficients diagonaux positifs et vérifie $W^2 = U = \lambda\,I_p$, donc $W = \sqrt{\lambda}\,I_p = V$. Ainsi, $w = v$.

Ainsi, r et s coïncident sur les sous-espaces propres de a : Comme $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de ces sous-espaces propres, $r = s$, donc $R = S$, ce que l'on voulait.

147

On voit que A est symétrique donc son endomorphisme canoniquement associé est autoadjoint. On voit que ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc elle est orthogonale. En outre,

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix},$$

donc la base susnommée est directe et A est la matrice d'une rotation.

En notant θ l'angle de la rotation, on sait que $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$, d'où $\cos\theta = -1$ et $\theta = \pi$.

Enfin, sans difficulté, l'axe de la rotation est

$$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

148

1. Clairement, $\Phi \in \mathfrak{L}(E)$. Soient P et Q dans E. On voit que $\Phi(P) = (1-X^2)\,P'' - 2\,X\,P' = ((1-X^2)\,P')'$, donc en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}(\Phi(P)\,|\,Q) &= \textstyle\int_{-1}^1 ((1-t^2)\,P''(t) - 2\,t\,P'(t))\,Q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(1-t^2)\,P'(t)\,Q(t)\right]_{-1}^1 - \textstyle\int_{-1}^1 (1-t^2)\,P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\textstyle\int_{-1}^1 (1-t^2)\,P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en P et Q, $(\Phi(P)\,|\,Q) = (P\,|\,\Phi(Q))$ et Φ est autoadjoint.

2. On a $\Phi(X^k) = -k\,(k+1)\,X^k + k\,(k-1)\,X^{k-2}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, donc la matrice de Φ dans la base canonique de E est triangulaire supérieure. Sa diagonale est constituée des entiers $-k\,(k+1)$, pour $k \in [\![0,n]\!]$, donc $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{-k\,(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.

149 — MP

Comme $A\,(A^\top A) = I_n$, A est inversible et $A^{-1} = A^\top A$. Alors A^{-1} est symétrique, donc A aussi : il existe deux matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = P\,D\,P^\top$. Du coup, $A\,(A^\top A) = A^3 = P\,D^3\,P^\top = I_n$, donc $D^3 = I_n$, et comme D est réelle, $D = I_n$. Enfin, $A = I_n$.

150 — CCP

Comme $A \in \mathscr{S}_4(\mathbb{R})$, donc il existe D diagonale et $P \in O(4)$ telles que $A = P\,D\,P^\top$. Constatons que $A^2 = 6\,A - 8\,I_4$. Comme A n'est pas une matrice scalaire, elle a au moins deux valeurs propres, qui sont donc les racines de $P = X^2 - 6\,X + 8$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$. Enfin, on voit aussi que

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\4\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Alors les espaces propres de A sont

$$E_4(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres ci-dessus sont clairement orthogonaux deux à deux. Alors $A = P\,D\,P^\top$, en posant $D = \mathrm{diag}(4, 4, 2, 2)$ et

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \in O(4).$$

151 — CCP

1. Sans difficulté, $M^\top M = I_4$, donc $M \in O(4)$ et $u \in O(E)$.

2. Posons $b = u(a)$,

$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \; B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(b) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u(b)) = M\,B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\2\end{pmatrix} = -A + \frac{2}{\sqrt{3}}B.$$

Donc $u(b) \in P$ et P est stable par u.

3. Oui, c'est du cours.

152 — CS

1. Dire que $I_3 + A$ est inversible signifie que -1 n'est pas valeur propre de A. Mais ici, il est aussi rapide de calculer directement par la règle de Sarrus

$$\det(I_3 + A) = 1 + a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

2. Notons $R = (I_3 - A)\,(I_3 + A)^{-1}$. En utilisant successivement que $(M\,N)^\top = N^\top M^\top$, que $(M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$, que $A^\top = -A$ et que les polynômes en A commutent,

$$R^\top R = (I_3 - A)^{-1}\,(I_3 - A)\,(I_3 + A)\,(I_3 + A)^{-1} = I_3.$$

De plus, $\det(I_3 - A) = 1 + a^2 + b^2 + c^2$ comme à la question 1, donc

$$\det(R) = \frac{\det(I_3 - A)}{\det(I_3 + A)} = 1.$$

Ainsi, $R \in SO(3)$, c'est une rotation.

3. Pour en déterminer l'axe et un angle, réduisons A, si c'est possible. On voit que

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Posons $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et

$$U = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

C'est possible car $r \neq 0$ par hypothèse. Alors $\mathrm{Ker}\,A = \mathbb{R}U$ et $\|U\| = 1$. Considérons le vecteur

$$V = \frac{1}{s}\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}$$

où $s = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si s est nul, $a = b = 0$, la matrice A est déjà bien simple et on passe à l'étape finale. Enfin, posons

$$W = U \wedge V = \frac{1}{r\,s}\begin{pmatrix}-a\,c\\-b\,c\\a^2 + b^2\end{pmatrix}.$$

Par construction, (U, V, W) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On calcule aisément

$$A\,V = \frac{1}{s}\begin{pmatrix}-a\,c\\-b\,c\\a^2 + b^2\end{pmatrix} = r\,W,$$

$$A\,W = \frac{r}{s}\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix} = -r\,V.$$

Alors, dans la base (U, V, W), l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice

$$B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -r\\0 & r & 0\end{pmatrix}.$$

Ce n'est pas une réduction habituelle, car B n'est ni diagonale, ni triangulaire. Alors, la rotation associée à R a pour nouvelle matrice $S = (I_3 - B)\,(I_3 + B)^{-1}$. Or, en menant les calculs par blocs,

$$(I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \begin{pmatrix}1 & -r\\r & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \begin{pmatrix}1 & -r\\r & 1\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 1 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 1 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 1 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix} 1-r^2 & 2r \\ -2r & 1-r^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-r^2}{1+r^2} & \dfrac{2r}{1+r^2} \\ 0 & -\dfrac{2r}{1+r^2} & \dfrac{1-r^2}{1+r^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $r \in \mathbb{R}_+^*$, on peut poser $\theta = 2\operatorname{Arctan} r \in]0, \pi[$, de sorte que $r = \tan\frac{\theta}{2}$. Alors,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On reconnait la rotation autour de U et d'angle $-\theta$.

Finalement, R est la rotation autour du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d'angle $-2\operatorname{Arctan}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

153 — **CCP**

1. f est clairement un endomorphisme, car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x \mapsto (e_k \,|\, x)$ est une forme linéaire sur E.

Soient x et y dans E. On a

$$(f(x) \,|\, y) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \,|\, x)(e_k \,|\, y).$$

L'expression est symétrique en x et y donc $(f(x) \,|\, y) = (x \,|\, f(y))$ et f est autoadjoint.

Soient $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé. D'une part, $(f(x) \,|\, x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \,|\, x)^2 \geqslant 0$. D'autre part, $(f(x) \,|\, x) = (\lambda x \,|\, x) = \lambda \|x\|^2$. Or $x \neq 0$ donc $\|x\|^2 > 0$. D'où $\lambda = (f(x) \,|\, x)/\|x\|^2 \geqslant 0$.

Enfin, pour $x \in E$, si $f(x) = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_k \,|\, x) = 0$ car $\mathscr{B}$ est une base. Donc x est orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{B}$, donc à tout vecteur de E : $x = 0$. Attention, $\mathscr{B}$ n'est pas supposée orthonormée, donc les $(e_k \,|\, x)$ ne sont pas, à priori, les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. Ainsi, f est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de f.

Finalement, $\operatorname{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{S}^{++}(E)$.

2. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, non nécessairement distinctes. D'après ce qui précède, $\lambda_k > 0$ pour tout k.

Soit $F = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = ((e_i \,|\, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On voit que F est symétrique, donc il existe $\Omega \in O(n)$ telle que $F = \Omega \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, \Omega^\top$. Alors,

$$\begin{aligned} F^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) &= \Omega \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \Omega^\top \\ &= \Omega \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^2 \Omega^\top \\ &= \left(\Omega \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \Omega^\top\right)^2. \end{aligned}$$

En notant g l'endomorphisme de E tel que

$$G = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(g) = \Omega \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \Omega^\top,$$

on a bien $g^2 = f^{-1}$. En passant, $G^\top = G$ et F et G commutent.

Montrons que g est autoadjoint. Bien-sûr, G est symétrique, mais l'on n'a pas supposé que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée donc on ne peut pas encore affirmer que g est autoadjoint.

Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E. En notant $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(y)$,

$$(x \,|\, y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i (e_i \,|\, e_j) y_j = X^\top F Y.$$

Alors

$$\begin{aligned} (g(x) \,|\, y) &= (GX)^\top F Y = X^\top G^\top F Y \\ &= X^\top G F Y = X^\top F G Y = (x \,|\, g(y)), \end{aligned}$$

et g est bien autoadjoint : $g \in \mathscr{S}(E)$. On peut même dire que $g \in \mathscr{S}^{++}(E)$ puisque $\operatorname{Sp}(g) = \operatorname{Sp}(G) \subset \mathbb{R}_+^*$.

3. Comme f est inversible, les vecteurs $u_j = f^{-1}(e_j)$ sont bien définis. De plus, pour tout j, $f(u_j) = e_j = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, u_j)\, e_i$, donc par unicité des coordonnées dans $\mathscr{B}$, $(e_i \,|\, u_j) = \delta_{ij}$ pour tout i. Alors

$$\begin{aligned} (g(e_i) \,|\, g(e_j)) &= (e_i \,|\, g^2(e_j)) = (e_i \,|\, f^{-1}(e_j)) \\ &= (e_i \,|\, u_j) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.