Dix-septième feuille d'exercices

Calcul différentiel

154 — AM

Étudier la classe $\mathscr{C}^1$ de la fonction définie par $f(0,0)=0$ et si $(x,y)\neq(0,0)$,

$$f(x,y)=\frac{x^2\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

155

Considérons la fonction

$$f\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+2y^2)^{-(x^2+y^2)}.\end{array}\right.$$

1. Montrer qu'elle admet un prolongement g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction g est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

156 — CS

Considérons une fonction $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha\geqslant 1$ tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^\alpha f(x,y,z)$$

si et seulement si pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z).$$

157 — CS

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y)=x^4+y^4-2\,(x-y)^2$ et l'ensemble $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max(x,y)\leqslant 2, \min(x,y)\geqslant -2\}$.

1. F admet-elle des extrémums sur A ? Quels points sont susceptibles d'être des extrémums locaux ?

2. Étudier $F(x,x)$ et $F(-x,x)$. Qu'en déduire quant à l'un des points précédents ?

3. Donner les extrémums de F sur A, puis tous ses extrémums.

Géométrie différentielle

158 — CCP

Donner la tangente en tout point de la courbe de $\mathbb{R}^3$ d'équations $x^2+z^2=5$, $x^2+y^2-z^2=1$.

159 — CCP

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, existe-t-il un plan tangent à la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$ perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$?

160 — CCP

1. Déterminer une équation du plan tangent P_0 à la surface d'équation $xyz=1$ au point (x_0,y_0,z_0).

2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur P_0.