Corrigés des exercices de la dix-septième feuille

154 — AM

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste à examiner le cas de $(0,0)$.

En utilisant les coordonnées polaires, on a

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \rho^2 \,|\cos^2\theta \sin\theta| \leqslant \rho^2,$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = 0 = f(0,0)$$

et f est continue en $(0,0)$.

On sait déjà que f admet des dérivées partielles premières continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On a $\frac{1}{x}\,(f(x,0) - f(0,0)) = 0$, donc la limite de ce rapport en $(0,0)$ est nulle et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

De plus, si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x\,y\,(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right| = \rho|\cos\theta\sin\theta\,(1+\sin^2\theta)| \leqslant \rho,$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

On procède de même pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

Finalement, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

155

1. Si l'on utilise les coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= \exp(-\rho^2\ln(\rho^2\,(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta))) \\ &= \exp(-2\rho^2\ln\rho - \rho^2\ln(1+\sin^2\theta)). \end{aligned}$$

Or $\lim_{\rho\to 0}\rho^2\ln\rho = 0$ et $\lim_{\rho\to 0}\rho^2\ln(1+\sin^2\theta) = 0$, donc $\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = 1$. Donc la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(0,0) = 1$ et $g(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction g est composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$. Les dérivées partielles de g sur cet ouvert sont

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\left(x\ln(x^2+2y^2) + \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+2y^2}\right)g(x,y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\left(y\ln(x^2+2y^2) + \frac{2y(x^2+y^2)}{x^2+2y^2}\right)g(x,y).$$

En outre,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \\ &= \Bigg(-2\,\rho\cos\theta\ln(\rho^2\,(1+\sin^2\theta)) \\ &\qquad - \frac{2\,\rho\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\Bigg)\,g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta), \end{aligned}$$

donc $\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial g}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = 0$. D'autre part,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = -2\,x\ln(x) + \mathrm{o}(x\ln(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$, car $\lim_{(0,0)}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$. Il en est de même pour $\frac{\partial g}{\partial y}$.

2. La fonction g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée de fonctions qui le sont. Le problème éventuel se situe donc en $(0,0)$. Par définition, si cette limite existe,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)}{x}.$$

Calculons

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)}{x} \\ &= -2\,(\ln(x^2)+1)\exp(-x^2\ln(x^2)) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty. \end{aligned}$$

Donc g n'admet pas de dérivée seconde par rapport à x en $(0,0)$, donc g n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

156 — CS

Condition nécessaire. Supposons qu'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^\alpha f(x,y,z).$$

Comme $\alpha\geqslant 1$, la fonction $\lambda\mapsto\lambda^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, on peut dériver la relation précédente par rapport à λ : pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} &x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \\ &\quad + z\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \alpha\,\lambda^{\alpha-1} f(x,y,z)\,; \end{aligned}$$

en évaluant en $\lambda = 1$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \alpha f(x,y,z).$$

Condition suffisante. Supposons que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \alpha f(x,y,z).$$

Introduisons la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \lambda\mapsto f(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, φ l'est sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(\lambda) = x\,\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z\,\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Par ailleurs, d'après l'hypothèse évaluée en $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, on a

$$\lambda x\,\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda y\,\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda z\,\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \alpha\, f(\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Autrement dit, $\lambda\,\varphi'(\lambda) = \alpha\,\varphi(\lambda)$, donc il existe une constante β telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = \beta\,\lambda^\alpha$. Comme $\beta = \varphi(1) = f(x,y,z)$, on en déduit que $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha\, f(x,y,z)$, ce que l'on voulait.

157 — CS

1. On voit que $A = [-2,2]^2$: c'est un fermé borné — c'est même la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 2, au sens de la norme infinie. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, et que F est clairement continue sur $\mathbb{R}^2$, F est bornée sur A et atteint ses bornes.

Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, si l'on se restreint à des points intérieurs à A, les extrémums potentiels sont les points critiques de F.

Soit $(x,y) \in A$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y).$$

Les points critiques de F sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = (x-y) \\ x^3 = -y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x^3 = 2x \end{cases}$$
$$\iff (x,y) \in \big\{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)\big\}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $F(x,x) = 2x^4 \geqslant 0$. D'autre part, $F(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2-4)$, et cette expression est négative au voisinage de $(0,0)$. Ainsi, F est tantôt positive, tantôt négative au voisinage de $(0,0)$, donc sachant que $F(0,0) = 0$, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local.

3. Pour étudier la nature des deux autres points critiques, introduisons la hessienne de F : pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$H_F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,) = HF(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour valeurs propres 16 et 24 : elles sont strictement positives, donc ces deux points critiques sont des minimums locaux stricts.

158 — CCP

D'après le cours, en un point d'une courbe intersection de deux surfaces, si les plans tangents à chacune des surfaces ne sont pas confondus, leur intersection est la tangente au point considéré à la courbe d'intersection. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de Γ. L'équation de la tangente est donc la conjonction des équations des plans tangents :

$$x\,x_0 + z\,z_0 = 5,\ \ x\,x_0 + y\,y_0 - z\,z_0 = 1.$$

159 — CCP

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de la surface S. Un vecteur normal au plan tangent à S en M_0 est le gradient en M_0 de la fonction $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$. On cherche donc M_0 tel que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \begin{pmatrix} 2\,x_0 \\ 2\,y_0 \\ -2\,z_0 \end{pmatrix}$$

soient colinéaires, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -z_0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2\,z_0 - 3\,y_0 \\ 3\,x_0 + z_0 \\ y_0 - 2\,x_0 \end{pmatrix},$$

d'où $y_0 = 2\,x_0$ et $z_0 = -3\,x_0$. Comme $M_0 \in S$, $1 = x_0^2 + (2\,x_0)^2 - (-3\,x_0)^2 = -4\,x_0^2$. C'est impossible, et M_0 n'existe pas.

160 — CCP

1. Introduisons la fonction $f : (x,y,z) \mapsto x\,y\,z - 1$. Nommons $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. On voit que le gradient

$$\nabla f(M_0) = (y_0\,z_0, z_0\,x_0, x_0\,y_0)$$

n'est pas nul, donc M_0 est un point régulier de S. Ainsi, le plan tangent $P_0 = TS_{M_0}$ a pour équation

$$(x - x_0)\,y_0\,z_0 + (y - y_0)\,z_0\,x_0 + (z - z_0)\,x_0\,y_0 = 0,$$

ou encore $x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3$.

2. On cherche le projeté orthogonal $H(x,y,z)$ de O sur P_0 : $H \in P_0$ donc

$$x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3.$$

Le vecteur $\overrightarrow{N} = (1/x_0, 1/y_0, 1/z_0)$ est normal à P_0 : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\,\overrightarrow{N}$ donc

$$x = \lambda/x_0,\ y = \lambda/y_0,\ z = \lambda/z_0.$$

En reportant dans l'équation de P_0,

$$\lambda\left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}\right) = 3.$$

Alors, le point H s'écrit

$$H = \frac{3}{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}} \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0}\right).$$