

Corrigés des exercices de la deuxième feuille

11

Tout d'abord, rappelons que l'on ne résout une équation différentielle que sur un intervalle. En outre, on ne s'intéressera pas ici au recollement des solutions. Enfin, on nommera systématiquement (E) les diverses équations différentielles et (H) leurs équations homogènes associées.

1. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La première ne s'annule qu'en 0, qui est donc l'unique singularité de (E) . Posons alors $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. Plaçons-nous sur I_k , où $k \in \{1, 2\}$. Sur I_k , (E) équivaut à sa forme normale

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}.$$

Une primitive de $x \mapsto 1/x^2$ est $x \mapsto -1/x$, donc l'ensemble des solutions de (H) sur I_k est

$$\mathcal{S}_{I_k}(H) = \{x \mapsto \alpha_k e^{1/x}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

D'autre part, on voit que $x \mapsto 1$ est solution évidente de (E) sur I_k , et même sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\mathcal{S}_{I_k}(E) = \{x \mapsto 1 + \alpha_k e^{1/x}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

2. Les fonctions $x \mapsto x(x^2 - 1)$, $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La première ne s'annule qu'en -1 , 0 et 1 . Plaçons-nous donc sur $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$. Sur I_k , pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la forme normale de (E) est

$$y' + \frac{2}{x(x^2 - 1)}y = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Une rapide décomposition en éléments simples donne, pour tout $x \in I_k$,

$$\frac{2}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Alors, une primitive sur I_k de $x \mapsto \frac{2}{x(x^2 - 1)}$ est

$$x \mapsto \ln|x+1| - 2\ln|x| + \ln|x-1| = \ln|(x^2 - 1)x^{-2}|,$$

donc

$$\exp\left(-\int \frac{2dx}{x(x^2 - 1)}\right) = \frac{x^2}{|x^2 - 1|}.$$

L'ensemble des solutions sur I_k de (H) est donc

$$\mathcal{S}_{I_k}(H) = \left\{x \mapsto \frac{\alpha_k x^2}{x^2 - 1}, \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Commentaire. La valeur absolue a disparu, car sur I_k , $x^2 - 1$ garde un signe constant, donc on peut l'absorber dans la constante arbitraire α_k .

Utilisons la méthode de variation de la constante : sur I_k , cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$x \mapsto \frac{\alpha_k(x)x^2}{x^2 - 1},$$

où α_k est une fonction dérivable sur I_k . En reportant dans (E) , pour tout $x \in I_k$,

$$x(x^2 - 1) \frac{\alpha'_k(x)x^2}{x^2 - 1} = x^2, \text{ d'où } \alpha'_k(x) = \ln|x|.$$

Commentaire. On choisit pour α_k une primitive arbitraire de α'_k , car l'on cherche une solution particulière.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\mathcal{S}_{I_k}(E) = \left\{x \mapsto \frac{(\alpha_k + \ln|x|)x^2}{x^2 - 1}, \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Les fonctions $x \mapsto \sin^3 x$ et $x \mapsto -2\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La première s'annule en $k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Plaçons-nous alors sur un intervalle $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Sur I_k , pour $k \in \mathbb{Z}$, la forme normale de cette équation déjà homogène (H) est

$$y' - \frac{2\cos x}{\sin^3 x}y = 0.$$

Une primitive sur I_k de $x \mapsto -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$, donc l'ensemble des solutions de (H) sur I_k est

$$\mathcal{S}_{I_k}(H) = \{x \mapsto \alpha_k e^{-1/\sin^2 x}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

12

Il s'agit d'équations différentielles linéaires scalaires du second ordre à coefficients constants et à seconds membres particuliers. On les résout donc sur $\mathbb{R}$. De plus, on les nomme toutes (E) , (H) leurs équations homogènes et (C) leurs équations caractéristiques associées.

1. (H) est $y'' - y = 0$ et (C) est $r^2 - 1 = 0$, dont les racines sont -1 et 1 . Donc l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Comme le coefficient dans l'exposant de l'exponentielle du second membre, 1 , est racine simple de (C) , cherchons une solution particulière sous la forme $x \mapsto Q(x)e^x$ où Q est de degré 5, et l'on trouve

$$Q(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5.$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{x \mapsto \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5\right)e^x + \alpha e^x + \beta e^{-x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. La résolution ne pose aucune difficulté, au détail près que -3 est racine double de (C) . L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \{x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{-3x} + (\alpha x + \beta)e^{-3x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Toujours pas de difficulté, mais ici, les racines de (C) sont les complexes conjugués $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \{x \mapsto & \frac{1}{3}(x-1)e^x \\ & + e^{-x/2}(\alpha \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \beta \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)), \\ & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

4. Ici, la difficulté concerne le second membre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x e^x \cos^2 x = \frac{1}{2} x e^x \cos(2x) + \frac{1}{2} x e^x.$$

Grâce au théorème de superposition, cherchons une solution particulière pour chacune des équations

$$(E_1) \quad y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2} x e^x \cos(2x),$$

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2} x e^x.$$

Pour (E_2) , puisque 1 n'est pas racine de (C) , cherchons une solution particulière sous la forme $x \mapsto Q(x)e^x$, où $\deg Q = 1$, et l'on trouve $Q(x) = \frac{1}{8}x$.

Pour (E_1) , puisque $e^x \cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{(1+2i)x})$ et que $1 + 2i$ est racine simple de (C) , cherchons une solution particulière sous la forme $x \mapsto x(Q_1(x)e^x \cos(2x) + Q_2(x)e^x \sin(2x))$, où $\deg Q_1 = \deg Q_2 \leq 1$, et l'on trouve $Q_1(x) = \frac{1}{32}$ et $Q_2(x) = \frac{1}{16}x$.

Commentaire. Le secret ici est de ne pas oublier le terme en $\sin(2x)$, qui vient de la partie imaginaire de $e^{(1+2i)x}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ x \mapsto x e^x \left(\frac{1}{32} \cos(2x) + \frac{1}{16} x \sin(2x) + \frac{1}{8} \right) \right. \\ \left. + e^x (\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)), \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

13 ————— **CS**

Notons (E) cette équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-2x}/\sqrt{1+x^2}$ est continue.

ÉQUATION HOMOGENÈME. Notons-la (H) . Son équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui admet -2 comme racine double. L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{x \mapsto (\alpha + \beta x)e^{-2x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

VARIATION DE LA CONSTANCE. *Choisissons* une solution de (H) sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par exemple $x \mapsto e^{-2x}$. Cherchons alors une solution particulière de (E) sous la forme $y : x \mapsto \alpha(x)e^{-2x}$ où α est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En reportant dans (E) , on obtient $\alpha''(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, d'où $\alpha'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et en intégrant par parties,

$$\alpha(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

Commentaire. Encore une fois, on choisit à chaque fois une primitive arbitraire, car on cherche une solution particulière de (E) .

RÉSOLUTION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ x \mapsto (x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}) \right. \\ \left. + \alpha + \beta x \right\} e^{-2x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

14 ————— **MT**

INTERVALLE DE RÉOLUTION. Nommons (E) cette équation différentielle. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 2-x$, $x \mapsto 1$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. De plus, 0 est la seule singularité de (E) . On se place donc sur l'un des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$, que l'on nomme I .

ÉQUATION HOMOGENÈME. Nommons (H) l'équation homogène associée à (E) . Dire que $x \mapsto x^\alpha$ est solution sur I de (H) signifie que pour tout $x \in I$, $x\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + (2-x)\alpha x^{\alpha-1} - x^\alpha = 0$, c'est-à-dire $(\alpha+1)(\alpha-x)x^{\alpha-1} = 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in I$ et que $x \neq 0$, $\alpha = -1$. Enfin, $\varphi_0 : x \mapsto 1/x$ est bien solution sur I de (H) .

Commentaire. On a raisonné par analyse-synthèse.

ÉQUATION COMPLÈTE. Appliquons la méthode de variation de la constante. Toute solution de (E) sur I peut s'écrire $y = \alpha \varphi_0$ où α est deux fois dérivable sur I . Alors, $y' = \alpha' \varphi_0 + \alpha \varphi_0'$ et $y'' = \alpha'' \varphi_0 + 2\alpha' \varphi_0' + \alpha \varphi_0''$. En reportant dans (E) , pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} x\varphi_0(x)\alpha''(x) + (2x\varphi_0'(x) + (2-x)\varphi_0(x))\alpha'(x) &= e^x \\ \iff \alpha''(x) - \alpha'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

C'est une équation du premier ordre en α' . On voit que $x \mapsto x e^x$ est solution évidente. Alors, $\alpha'(x) = \beta e^x + x e^x$, $\beta \in \mathbb{R}$, et en intégrant par parties, $\alpha(x) = (x + \beta - 1)e^x + \gamma$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Comme β est un réel arbitraire, $\beta - 1$ l'est aussi, donc l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\mathcal{S}_I(E) = \left\{ x \mapsto \frac{1}{x}(\beta + \gamma e^x) + e^x, (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

15 ————— **AM**

1. On voit que $x \mapsto 1 + x^2$ est solution évidente.

2. Avec la méthode de la variation de la constante, on trouve sans difficulté (hum...) les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, qui sont d'ailleurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et donc également solutions sur $\mathbb{R}$: l'ensemble des solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ x \mapsto \alpha(x^2 + 1) \right. \\ \left. + \beta((x^2 + 1) \operatorname{Arctan} x - x), \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

16 ————— **ENAC**

1. Pour commencer, le cosinus est bijectif et $\mathcal{C}^1$ de $]0, \pi[$ sur $] -1, 1[$, ainsi que sa réciproque. Donc on étudie z sur $]0, \pi[$. En outre, pour $x \in] -1, 1[$, on pose $x = \cos \theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$ et (E) devient

$$-\sin^2 \theta y''(\cos \theta) + 3 \cos \theta y'(\cos \theta) - 8y(\cos \theta) = 0.$$

D'autre part, en dérivant $z(\theta) = \sin \theta y(\cos \theta)$, on a

$$\begin{aligned} z'(\theta) &= \cos \theta y(\cos \theta) - \sin^2 \theta y'(\cos \theta), \\ z''(\theta) &= -\sin \theta y(\cos \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta y'(\cos \theta) \\ &\quad + \sin^3 \theta y''(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sin \theta (-\sin^2 \theta y''(\cos \theta) \\
&\quad + 3 \cos \theta y'(\cos \theta)) - \sin \theta y(\cos \theta) \\
&= -\sin \theta 8y(\cos \theta) - \sin \theta y(\cos \theta) \\
&= -9z(\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi, $z = \theta \mapsto \alpha \cos(3\theta) + \alpha \sin(3\theta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Or

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4x^3 - 3x$$

$$\sin(3\theta) = (4 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta = (4x^2 - 1) \sqrt{1 - x^2}.$$

Alors, l'ensemble des solutions sur $] -1, 1[$ de (E) est

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{]-1,1[}(E) = \left\{ x \mapsto \alpha \frac{4x^3 - 3x}{\sqrt{1 - x^2}} + \beta (4x^2 - 1), \right. \\
\left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

2. Pour résoudre (E) sur les intervalles $] -\infty, -1[$ et $] 1, +\infty[$, on pourrait procéder de même avec la trigonométrie hyperbolique. Cela dit, on voit que $x \mapsto 4x^2 - 1$ est solution sur $] -1, 1[$ de (E) : comme il s'agit d'un polynôme, il est aussi solution sur $\mathbb{R}$. En outre, on vérifie aisément que $x \mapsto (4x^3 - 3x)/\sqrt{x^2 - 1}$ est solution de (E) sur $] -\infty, -1[$ et $] 1, +\infty[$. Alors, puisque sur ces intervalles l'espace des solutions est de dimension 2 et que l'on a deux solutions indépendantes (car l'une est un polynôme et l'autre pas), on a toutes les solutions.