Troisième feuille d'exercices

Rappels sur les matrices et les déterminants

17 — CCP

Montrer que A et T sont semblables, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18 — TPE

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

1. Montrer que $\dim E$ est un entier pair.

2. Montrer qu'il existe une base dans laquelle u a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}$.

19 — CCP

Soit $(A, B) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.

20 — MP

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\operatorname{rg} M = 1$, il existe deux vecteurs colonnes X et Y tels que $M = XY^\top$.

2. Montrer que si $\operatorname{rg} M = 2$, il existe deux couples de vecteurs indépendants (X, Z) et (Y, T) tels que $M = XY^\top + ZT^\top$.

3. Généralisation : que dire si $\operatorname{rg} M = k$?

21 — CCP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

22 — CCP

Inverser la matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients m_{ij} valent 0 si $i > j$ et $j - i + 1$ sinon.

23

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Considérons l'ensemble F des (x, y, z, t) de E tels que

$$x + y + z + t = 0, \; x - y + z - t = 0,$$

et l'ensemble G des (x, y, z, t) de E tels que

$$x + y - z - t = 0, \; x - y - z + t = 0.$$

Déterminer dans la base canonique de E, la matrice de la projection sur F parallèlement à G.

24

Donner le rang, le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

25 — CCP

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_6[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $D = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

1. Montrer que $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}_6[X], \mathbb{R}_3[X])$.

2. Donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_6[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Donner une base et la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

26 — MP

Inverser la matrice carrée dont les éléments diagonaux sont nuls et les autres valent a.

27 — CS

Calculer le déterminant de la matrice symétrique $A = (a_{ij})$ définie par

$$\begin{cases} a_{ii} = 2\cos\theta & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a_{ij} = \delta_{i+1,j} & \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n. \end{cases}$$

28 — CCP

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}.$$