Corrigés des exercices de la troisième feuille

17 — **CCP**

Comme A et T ont le même découpage par blocs, il suffit de montrer que les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Nommons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B. Nous cherchons une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u soit U. Alors on doit avoir $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ et $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. En exprimant ces égalités vectorielles dans la base (e_1, e_2), en notant x_1 et y_1 les coordonnées de ε_1 dans la base canonique, on résout

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

d'où $x_1 = y_1$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on résout

$$B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

d'où $x_2 = y_2 + \frac{a}{2}$, et l'on choisit $a = 2$ et

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut écrire $B = Q U Q^{-1}$ en posant

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on a $A = P T P^{-1}$ en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que A et T sont bien semblables.

18 — **TPE**

1. Comme E est de dimension finie, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = 2p$, en notant $p = \dim(\operatorname{Ker} u)$.

2. De plus, $\operatorname{Ker} u$ admet un supplémentaire G dans E et l'application

$$v = u|_G^{\operatorname{Im} u} : G \to \operatorname{Im} u,\ x \mapsto u(x)$$

est un isomorphisme.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} u$, qui est donc aussi une base de $\operatorname{Im} u$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, posons $e_{p+i} = v^{-1}(e_i)$, l'image réciproque par v de e_i. Par construction, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_{p+i}) = e_i$. De plus, comme v est un isomorphisme, la famille $(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ est une base de G. Alors la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ est une base de E, car $E = \operatorname{Im} u \oplus G$. Dans cette base, la matrice de u a la forme voulue.

19 — **CCP**

Comme $-AB = BA$,

$$\begin{aligned}(-1)^n \det(AB) &= \det(BA) = \det(B)\det(A) \\ &= \det(A)\det(B) = \det(AB).\end{aligned}$$

Or A et B sont inversibles donc AB l'est et $\det(AB) \neq 0$. Alors $(-1)^n = 1$ et n est pair.

20 — **MP**

Nommons C_j les colonnes de M, où $j \in [\![1, n]\!]$.

1. Comme $\operatorname{rg} M = 1$, l'espace engendré par ses colonnes est une droite vectorielle. Soit $X \neq 0$ un vecteur colonne directeur de cette droite. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un scalaire y_j tel que $C_j = y_j X$. Alors, en juxtaposant les colonnes,

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 X & y_2 X & \dots & y_n X \end{pmatrix} \\ &= X \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = X Y^\top, \end{aligned}$$

où Y est le vecteur colonne contenant les y_j. En passant, $Y \neq 0$, sinon $M = 0$.

Ainsi, il existe deux vecteurs colonnes non nuls tels que $M = X Y^\top$.

2. Si $\operatorname{rg} M = 2$, l'espace engendré par les colonnes est un plan, dirigé par des colonnes indépendantes X et Z. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe des scalaires y_j et t_j tels que $C_j = y_j X + t_j Z$. Alors, en posant $Y^\top = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ et $T^\top = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$, on a $M = X Y^\top + Z T^\top$.

Enfin, Y et T sont indépendants, sinon, on peut écrire $T = \lambda Y$, en les renommant au besoin, et alors $M = (X + \lambda Z) Y^\top$ est de rang 1.

En passant, une matrice de rang 2 est donc somme de deux matrices de rang 1.

3. Si $\operatorname{rg} M = k$, l'espace engendré par les colonnes est de dimension k. Nommons $(X_1, \dots, X_k)$ l'une de ses bases. Toute colonne de M s'écrit $C_j = \sum_{i=1}^k y_{ij} X_i$ où les y_{ij} sont des scalaires. En posant $Y_i^\top = \begin{pmatrix} y_{i1} & y_{i2} & \dots & y_{in} \end{pmatrix}$, on a $M = \sum_{i=1}^k X_i Y_i^\top$.

Si la famille $(Y_1, \dots, Y_k)$ est liée, en renommant éventuellement les vecteurs, on peut écrire $Y_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i Y_i$, donc $M = \sum_{i=1}^{k-1} (X_i + \lambda_i X_k) Y_i^\top$ et elle est de rang au plus $k - 1$.

Finalement, si $\operatorname{rg} M = k$, il existe deux familles libres de vecteurs colonnes $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_k)$ telles que $M = \sum_{i=1}^k X_i Y_i^\top$.

En passant, toute matrice de rang k est somme de k matrices de rang 1.

21 — **CCP**

Testons les petites valeurs de n. Par convention, posons $D_1 = 1$; on a

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\,;$$

en faisant successivement $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on a

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En fait, dès que $n \geqslant 3$, cette démarche est valide : en faisant successivement $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient deux colonnes remplies de 1, donc $D_n = 0$.

22 — **CCP**

La matrice considérée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Résolvons le systèmes $M\,X = Y$, où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Par définition de M, les lignes de ce système sont $L_i : \sum_{j=i}^n (j - i + 1)\,x_j = y_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. Pour i variant de 1 à $n-1$, faisons $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$. Alors L_i devient

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=i}^n (j - i + 1)\,x_j - \sum_{j=i+1}^n (j - (i+1) + 1)\,x_j \\ &= x_i + \textstyle\sum_{j=i+1}^n x_j = \sum_{j=i}^n x_j = y_i - y_{i+1}. \end{aligned}$$

Recommençons : pour i variant de 1 à $n-1$, faisons $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$. Alors, pour $i \in [\![1, n-2]\!]$, L_i devient

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=i}^n x_j - \sum_{j=i+1}^n x_j = x_i \\ &= y_i - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_{i+2}) \\ &= y_i - 2\,y_{i+1} + y_{i+2} \end{aligned}$$

et L_{n-1} devient $L_{n-1} : x_{n-1} = y_{n-1} - 2\,y_n$. On vient d'exprimer les x_i en fonctions des y_j, c'est-à-dire $X = M^{-1}\,Y$, donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & (0) & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

23

1. Montrons que $E = F \oplus G$. Soit $u = (x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} u \in F &\iff x + z = 0,\ y + t = 0, \\ \text{et } u \in G &\iff x - z = 0,\ y - t = 0. \end{aligned}$$

Alors $F = \mathrm{Vect}(\{a, b\})$ et $G = \mathrm{Vect}(\{c, d\})$ où

$$\begin{aligned} a &= (1, 0, -1, 0), & b &= (0, 1, 0, -1), \\ c &= (1, 0, 1, 0), & d &= (0, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

On voit que (a, b, c, d) est une base de E, donc $E = F \oplus G$ et la projection p sur F parallèlement à G est bien définie.

2. Notons $\mathscr{B} = (i, j, k, \ell)$ la base canonique, où

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 0, 0), & j &= (0, 1, 0, 0), \\ k &= (0, 0, 1, 0), & \ell &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Déterminons $p(i)$, $p(j)$, $p(k)$ et $p(\ell)$. On voit que

$$\begin{aligned} i &= \tfrac{1}{2}\,(a + c), & j &= \tfrac{1}{2}\,(b + d), \\ k &= \tfrac{1}{2}\,(-a + c), & \ell &= \tfrac{1}{2}\,(-b + d). \end{aligned}$$

donc

$$p(i) = \tfrac{1}{2}\,a,\ p(j) = \tfrac{1}{2}\,b,\ p(k) = -\tfrac{1}{2}\,a,\ p(l) = -\tfrac{1}{2}\,b.$$

Ainsi, la matrice cherchée est

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24

Notons A cette matrice et C_1, C_2 et C_3 ses colonnes. En empilant les matrices A et I_3, et en faisant successivement $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, on obtient la transformation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le bloc du haut a le même rang que A, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$. De plus, on y lit une base de l'image :

$$\mathrm{Im}\,A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En regardant la colonne du bloc du bas sous la colonne nulle du bloc du haut, on lit une base du noyau :

$$\mathrm{Ker}\,A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25 — **CCP**

1. Comme $D \neq 0$ et que $\deg(D) = 4$, d'après la division euclidienne des polynômes, on a

$$\mathbb{R}_6[X] = D\,\mathbb{R}_2[X] \oplus \mathbb{R}_3[X].$$

Alors, f est linéaire car c'est le projecteur sur $\mathbb{R}_3[X]$ parallèlement à $D\,\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire. À vrai dire, f est la corestriction à $\mathbb{R}_3[X]$ dudit projecteur.

2. On a $f(1) = 1$, $f(X) = X$, $f(X^2) = X^2$ et $f(X^3) = X^3$. De plus, $X^4 = D - X^3 - X^2 - X - 1$ donc $f(X^4) = -X^3 - X^2 - X - 1$; de même, $X^5 = (X-1)\,D + 1$ donc $f(X^5) = 1$ et $X^6 = (X^2 - X)\,D + X$ donc $f(X^6) = X$. Ainsi, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. D'après la question 1, $\operatorname{Ker} f = D\,\mathbb{R}_2[X]$ dont une base est $(D, X\,D, X^2\,D)$; et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$, dont on connait une base.

26 — **MP**

Notons A cette matrice : elle s'écrit $A = a\,(J - I)$, où J est la matrice remplie de 1, et I est la matrice identité, bien-sûr. Comme $J^2 = n\,J$,

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2\,(J^2 - 2\,J + I) = a^2\,(n-2)\,J + a^2\,I \\ &= a\,(n-2)\,(A + a\,I) + a^2\,I \\ &= a\,(n-2)\,A + a^2\,(n-1)\,I \end{aligned}$$

d'où $A\,(A - a\,(n-2)\,I) = a^2\,(n-1)\,I$. Donc A est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (et $n > 1$) et

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2\,(n-1)}\,(A - a\,(n-2)\,I).$$

27 — **CS**

Nommons plutôt A_n la matrice. En développant $D_n = \det(A_n)$ par rapport à sa première colonne,

$$D_n = 2\cos\theta \cdot D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Cette récurrence linéaire d'ordre 2 a pour équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta \cdot r + 1 = 0$. Alors, $D_n = \alpha\cos(n\,\theta) + \beta\sin(n\,\theta)$. On trouve α et β avec $D_1 = 2\cos\theta$ et $D_2 = 4\cos^2(\theta) - 1$:

$$D_n = \cos(n\,\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\,\theta) = \frac{\sin[(n+1)\,\theta]}{\sin\theta}.$$

Commentaire. Le cas où $\sin\theta = 0$ est laissé au lecteur :-)

28 — **CCP**

1. En faisant successivement $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2\,b & b-c-a & 2\,b \\ 2\,c & 2\,c & c-a-b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2\,b & -b-c-a & 0 \\ 2\,c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^3, \end{aligned}$$

et M est inversible si et seulement si $a+b+c \neq 0$.

2. On a $M = 2\,N - (a+b+c)\,I_3$, où

$$N = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}.$$

Or $N^2 = (a+b+c)\,N$. Donc $M^2 = (a+b+c)^2\,I_3$, et $M^{-1} = (a+b+c)^{-2}\,M$.